

# **Ecole Doctorale Carnot-Pasteur**

## **Proposition de sujet de thèse**

### **Intitulé français du sujet de thèse proposé :**

La géométrie énumérative et la théorie des représentations des algèbres quantiques

### **Intitulé en anglais du sujet de thèse proposé :**

Enumerative Geometry and Representation Theory of Quantum Algebras

**Unité de recherche :** IMB (UMR 5584, Université de Bourgogne & CNRS)

### **Nom, prénom et courriel du directeur (et co-directeur) de thèse :**

KIMURA, Taro [taro.kimura@u-bourgogne.fr]

### **Domaine scientifique principal de la thèse :**

Théorie géométrique des représentations / Geometric representation theory

### **Domaine scientifique secondaire de la thèse :**

Physique mathématique / Mathematical physics

### **Description du projet scientifique :**

(Version française)

Le développement de la géométrie énumérative moderne est motivé par diverses connexions intéressantes avec différentes disciplines des mathématiques et de la physique. Par exemple, l'invariant de Donaldson-Thomas (DT) est un invariant énumératif associé aux faisceaux cohérents sur les variétés de Calabi-Yau (CY), qui a également été étudié dans le contexte de la théorie des cordes/M en relation avec les états BPS et la condition de stabilité. Récemment, il a été remarqué que l'espace des modules des faisceaux cohérents sur une classe de variétés algébriques fournit une réalisation géométrique naturelle pour discuter des représentations d'algèbres quantiques (algèbres d'opérateurs vertex, algèbres de Kac-Moody, algèbres quantiques affines/toroïdales...), agissant sur la cohomologie/K-théorie équivariante de l'espace des modules susmentionné. Grâce à cette correspondance, on peut calculer efficacement les fonctions génératrices des invariants énumératifs en utilisant la fonction de corrélation holomorphe (bloc conforme) des algèbres quantiques, qui est directement

identifiée avec la fonction de partition des théories de jauge supersymétriques via la localisation équivariante.

Le but de ce projet est d'établir une approche algébrique quantique de la géométrie énumérative des variétés algébriques en dimensions supérieures, et d'élucider ses perspectives de théorie géométrique des représentations. Par exemple, la variété torique quadridimensionnelle de CY est une classe de géométrie particulièrement intéressante, qui a été largement étudiée ces dernières années. Dans ce cas, on peut considérer des invariants énumératifs, qui comptent des sous-schémas de dimensions supérieures par rapport à la variété tridimensionnelle de CY bien étudié. Le candidat retenu est censé poursuivre les sujets suivants en fonction de son intérêt et de ses antécédents scientifiques : (i) construction des invariants DT/PT des variétés de CY tridimensionnelle et quadridimensionnelle avec des conditions aux bords multiples basées sur l'union de quasi-applications de  $\mathbf{P}^1$  aux variétés de carquois de Nakajima (et la version avec des potentiels), (ii) formalisme des opérateurs vertex des invariants énumératifs équivariants associés au comptage de surfaces dans les variétés quadridimensionnelles de CY, (iii) construction géométrique des représentations d'algèbres toroïdales quantiques associées à des invariants énumératifs supérieurs au-delà des modules de Fock et de MacMahon, (iv) sujets connexes sur la théorie de jauge supersymétrique et la théorie des cordes/M.

(English version)

Development of modern enumerative geometry is motivated by various interesting connections with different disciplines of mathematics and physics. For example, the Donaldson-Thomas (DT) invariant is an enumerative invariant associated with coherent sheaves on Calabi-Yau (CY) varieties, which has been also studied in the context of string/M-theory in the relation to the BPS states and the stability condition. Recently it has been noticed that the moduli space of coherent sheaves on a class of algebraic varieties provides a natural geometric setup to realize representations of quantum algebras (vertex operator algebras, Kac-Moody algebras, quantum affine/toroidal algebras...), acting on equivariant cohomology/K-theory of the above-mentioned moduli space. Through this correspondence, one can compute generating functions of enumerative invariants efficiently using the holomorphic correlation function (conformal block) of quantum algebras, which is directly identified with the partition function of supersymmetric gauge theories via the equivariant localization.

The purpose of this project is to establish a quantum algebraic approach to enumerative geometry of algebraic varieties in higher dimensions, and to elucidate its geometric representation theory perspectives. For example, the toric CY four-fold is a particularly interesting class of geometry, that has been extensively investigated in recent years. In this case, one can consider enumerative invariants, that count higher dimensional subschemes compared with the well-studied CY three-fold. The successful candidate is expected to pursue the following subjects depending on his/her interest and background: (i) construction of DT/PT invariants of CY three- and four-folds with multiple boundary conditions based on the union of quasi-maps from  $\mathbf{P}^1$  to Nakajima quiver varieties (and the version with potentials), (ii) vertex operator formalism of equivariant enumerative invariants associated with the surface counting in CY four-fold, (iii) construction of geometric representations of quantum toroidal algebras associated with higher enumerative invariants beyond Fock and MacMahon modules, (iv) related subjects on supersymmetric gauge theory and string/M-theory.

**Connaissances et compétences requises :**

Bases de la géométrie algébrique (schémas, théorie géométrique des invariants...) et/ou la théorie des représentations (algèbres de Lie simples, algèbres de Kac-Moody, groupes quantiques...)

Basics of algebraic geometry (schemes, geometric invariant theory...) and/or representation theory (simple Lie algebras, Kac-Moody algebras, quantum groups...)