

Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé : Modules d'écheveau et invariants quantiques des variétés de Seifert

Intitulé en anglais : Skein modules and quantum invariants of Seifert fibered manifolds

Unité de recherche : Institut de Mathématiques de Bourgogne (UMR 5584)

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-directeur) de thèse :

Detcherry, Renaud, renaud.detcherry@u-bourgogne.fr

Massuyeau, Gwenael, gwenael.massuyeau@u-bourgogne.fr

Domaine scientifique principal de la thèse : Topologie de petite dimension

Domaine scientifique secondaire de la thèse :

Description du projet scientifique

Les modules d'écheveau (ou modules *skein*) des variétés topologiques de dimension 3 sont des espaces vectoriels qui décrivent la combinatoire des entrelacs dans une variété de dimension 3, modulo certaines relations locales appelées relations skein. Ces objets jouent un rôle central dans le domaine de la *topologie quantique*, qui étudie les invariants de nœuds, entrelacs, 3-variétés, issus du polynôme de Jones. Ainsi, ils sont à la base de la définition des TQFTs de Reshetikhin-Turaev, et interviennent donc dans le calcul de nombreux invariants quantiques. D'autre part, certaines conjectures importantes de la topologie quantique peuvent se réduire à des questions (difficiles) sur les modules skein des 3-variétés. Ainsi, la conjecture AJ qui relie les polynômes de Jones coloriés d'un nœud à sa variété de caractère SL_2 , est reliées aux propriétés de finitude des modules skein des complémentaires de nœuds. Malgré leur place centrale dans la topologie quantique, le calcul des modules skein des 3-variétés reste notoirement difficile, et connu seulement pour un petit nombre d'exemples de 3-variétés assez simples.

L'objet de ce projet est d'étudier les modules skein des 3-variétés, notamment via une nouvelle méthode développée par Gilmer et Masbaum. En effet, leur travail montre comment trouver des bornes inférieures pour la dimension des modules skeins d'une 3-variété à partir de l'étude de la suite des invariants de Reshetikhin-Turaev des entrelacs dans cette 3-variété. Notons que

des bornes supérieures sur la dimension des modules skeins peuvent être trouvés de manière plus élémentaire.

Dans le cadre de ce projet de thèse, on cherchera à appliquer la théorie de Gilmer-Masbaum au calcul des modules skein des variétés Seifert, en utilisant les formules explicites des invariants de Reshetikhin-Turaev pour ces variétés. Dans un premier temps, on étudiera les modules skein des fibrés en tores sur le cercle, pour lesquels ces formules sont particulièrement simples.

D'autre part, la théorie de Gilmer-Masbaum ayant été développée pour le cas particulier du module de Kauffman, un autre projet serait de la généraliser à d'autres modules skein. Notons ici qu'on peut définir, pour chaque groupe réductif complexe et chaque 3-variété M , un module skein $Sk_G(M)$, le module de Kauffman correspondant au cas $G=SL_2$. Les invariants de Reshetikhin-Turaev admettent aussi des variantes, associées à chaque algèbre de Lie quantique $U_q(\mathfrak{g})$, et il devrait être possible d'étudier ces autres modules skein à partir des différentes versions des invariants de Reshetikhin-Turaev.

Enfin, un autre sujet connexe serait d'étudier les représentations des mapping class groups des surfaces associés aux représentations de dimension finie des algèbres skein des surfaces.

Celle-ci peuvent être décrites, grâce à la théorie de Bonahon-Wong, via leur « ombre classique » : les caractères du groupe fondamental de la surface étant essentiellement en bijection avec les représentations irréductibles de l'algèbre skein en une racine de l'unité. Les caractères à valeurs dans un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{C})$ fournissent en particulier des représentations des mapping class groups des surfaces aux propriétés pour l'instant assez mal connues. L'un des directeurs (Renaud Detcherry) a développé une méthode permettant le calcul explicite de ces représentations. De plus, la théorie de Bonahon-Wong intervient aussi dans des travaux récents de Renaud Detcherry et permet de relier la dimension des modules skein des 3-variétés aux nombres de classes de conjugaison de représentations de $\pi_1(M)$ vers $SL_2(\mathbb{C})$, pour certaines 3-variétés M .

Ainsi, un des buts du projet sera pour l'étudiant de se familiariser avec la théorie de Bonahon-Wong pour l'appliquer à la fois à l'étude des modules skein et de ces nouvelles représentations des mapping class groups des surfaces.

Connaissances et compétences requises :

Ce projet s'adresse à un étudiant initié à la topologie de petite dimension, notamment aux présentations par chirurgie des 3-variétés et à la théorie des variétés Seifert. D'autre part, les encadrants cherchent un candidat ayant une expérience de la topologie quantique. Des connaissances sur les modules skeins des 3-variétés ou sur les invariants de Reshetikhin-Turaev seront particulièrement appréciés.

Les encadrants cherchent en outre un candidat motivé et sachant faire preuve d'autonomie.