Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé :
Problème du K(pi,1) dans les groupes d'Artin et arrangements d'hyperplans

Intitulé en anglais :
K(pi,1) conjecture for Artin groups and hyperplane arrangements

Unité de recherche :
IMB, UMR 5584 du CNRS

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-encadrant) de thèse :
Paris, Luis, lparis@u-bourgogne.fr

Domaine scientifique principal de la thèse :
Mathématiques

Domaine scientifique secondaire de la thèse :

Description du projet scientifique

Le thème du projet appartient à la théorie des arrangements d'hyperplans et à celle des groupes d'Artin. Ces deux sujets sont voisins et sont à la croisée de différents domaines des mathématiques dont la topologie algébrique, les singularités et la théorie des groupes. La théorie des arrangements d'hyperplans et celle des groupes d'Artin sont nées de la même série d'articles dans les années 1970, dus à des mathématiciens de renom tels que Arnold, Brieskorn ou Deligne. Ces deux théories se sont développées indépendamment l'une de l'autre, mais leur interaction est restée importante tout au long de leur histoire, et il est naturel de trouver des questions ou projets de recherche qui concernent ces deux sujets. Le problème du $K(\pi,1)$ en est un exemple emblématique et c'est sur cette question qu'est basé le sujet de cette thèse.

Un groupe d'Artin A est par définition un groupe qui admet une présentation avec des relations de la forme sts... = tst..., les mots de gauche et de droite ayant la même longueur. Le groupe de Coxeter associé à A est le quotient de A par les relations $s^2=1$. Dans la théorie classique un arrangement d'hyperplans est une famille finie d'hyperplans linéaires dans un espace vectoriel complexe. De façon plus générale, dans ce projet nous considérerons aussi des familles d'hyperplans localement finis dans un cône convexe réel et leurs complexifiés.

Le projet de recherche proposé consiste en travailler en même temps sur trois questions liées. Les outils préliminaires que devrait acquérir l'étudiant(e) sont sensiblement les mêmes pour ces trois problèmes et la diversification des questions serait une démarche naturelle dans ce contexte.

Un groupe d'Artin est dit de type sphérique si le groupe de Coxeter associé est fini. Il existe (entre autres) dans la littérature deux complexes simpliciaux qui sont des espaces classifiant des groupes d'Artin de type sphérique. Le premier est le complexe de Salvetti [Sal87]. Le second est un complexe introduit par Dehornoy et Lafond [DL03] pour tout groupe de Garside, qui est une généralisation des groupes d'Artin de type sphérique. On sait pour des raisons théoriques que ces deux complexes ont le même type d'homotopie mais aucune équivalence d'homotopie explicite n'est connue.

Question 1 : Déterminer une équivalence d'homotopie explicite entre ces deux complexes.

La conjecture du $K(\pi,1)$ est encore ouverte pour une famille de groupes d'Artin assez populaire appelés groupes d'Artin de type affine. De la solution à la question 1 devrait (peut-être) surgir une idée pour résoudre cette question en suivant la stratégie suivante. On sait que résoudre cette conjecture revient à démontrer que le complexe de Salvetti associé au groupe est un espace classifiant du groupe. Par ailleurs, on sait par McCammond et Sulway [MS17] que tout groupe d'Artin de type affine se plonge dans un groupe de Garside. A partir de ce plongement et de la construction de Dehornoy et Lafond [DL03] on devrait pouvoir construire un CW-complexe qui soit un espace classifiant du groupe d'Artin considéré. Resterait à résoudre la question suivante.

Question 2 : Déterminer si ces deux espaces sont homotopiquement équivalents.

Soit W un groupe de Weyl. A W on associe deux arrangements d'hyperplans. Le premier est l'arrangement de Coxeter de W. Le second est un arrangement infini d'hyperplans affines, c'est l'arrangement du groupe de Coxter affine associé à W. Il existe une famille d'arrangements (finis) d'hyperplans qui contiennent le premier et sont contenus dans le second, étudiés en particulier dans le cadre des modules de dérivations des arrangements d'hyperplans (voir Yoshinage [Yos04], par exemple). Dans le cas où W est le groupe symétrique, ces arrangements sont les arrangement dits « Catalans ». Nous pensons que les techniques qui permettront de répondre aux deux questions précédentes permettront aussi de répondre à la suivante.

Question 3 : Déterminer parmi ces arrangements lesquels ont un complémentaire $K(\pi,1)$.

Références

[DL03] Dehornoy, P.; Lafont, Y. Homology of Gaussian groups. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (2003), no. 2, 489–540.

[MS17] McCammond, Jon; Sulway, Robert Artin groups of Euclidean type. Invent. Math. 210 (2017), no. 1, 231–282.

[Sal87] Salvetti, M. Topology of the complement of real hyperplanes in CN. Invent. Math. 88 (1987), no. 3, 603–618.

[Yos04] Yoshinaga, Masahiko Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. Invent. Math. 157 (2004), no. 2, 449 – 454.

Connaissances et compétences requises :

La candidate ou le candidat devrait être issu d'un master de mathématiques fondamentales avec, si possible, une spécialisation dans l'un des domaines suivants : « géométrie des groupes », « topologie algébrique », « topologie de basse dimension ».