Proposition de sujet de thèse

Intitulé en français : Modèles équivariants de variétés algébriques munies d'actions de tores

Intitulé en anglais : Equivariant models of algebraic varieties endowed with torus actions

Unité de recherche : Institut de Mathématiques de Bourgogne - UMR 5584

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-encadrant) de thèse :
Encadrant principal : DUBOULOZ Adrien (Adrien.Dubouloz@u-bourgogne.fr)
Co-Encadrant : TERPEREAU Ronan (ronan.terpereau@u-bourgogne.fr)

Domaine scientifique principal de la thèse : Géométrie algébrique

Domaine scientifique secondaire de la thèse : Géométrie différentielle

Description du projet scientifique :

Les variétés algébriques complexes munies d'actions du tore $(\mathbb{C}^*, \times)^n$ forment une classe de variétés très étudiées pour la richesse de leur géométrie et qui apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes en géométrie algébrique. La structure géométrique globale de ces variétés est contrôlée par par des objets combinatoires issus de la géométrie convexe. Parmi les exemples les plus simples de variétés avec actions de tores figurent les tores eux-même, les espaces affines et les produit d'espaces projectifs complexes. Plus généralement, *les variétés toriques*, qui sont les variétés sur lesquelles un tore agit avec une orbite dense, sont contrôlées par les *éventails* qui sont des collections finies de cônes convexes disjoints dans un réseau. Les variétés toriques sont, avec peut-être les surfaces algébriques, parmi les variétés les plus étudiées en géométrie algébrique puisqu'elles constituent un terreau fertile sur lequel on peut tester tout type de conjectures.

Par un résultat de décomposition classique (dû à Sumihiro), toute variété algébrique munie d'une action d'un tore admet un recouvrement par des ouverts invariants qui sont des variétés affines. L'étude de la géométrie globale de ces variétés peut donc s'envisager en deux étapes, consistant dans un premier temps à décrire la structure des variétés affines munies d'une action d'un tore, puis ensuite à déterminer la manière dont ces "ouverts élémentaires" peuvent se recoller pour former toutes les variétés avec actions de tores.

Une variété affine X munie d'une action d'un tore est uniquement déterminée par une donnée algébrique consistant en une $\mathbb{C}$-algèbre de type finie

$$A = \bigoplus_{m \in \omega \subset M} A_m$$

munie d'une graduation par un semi-groupe abélien consistant en cône convexe polyédral ω à sommets dans un réseau M. Dans le cas des variétés toriques, la donnée du réseau M et du cône ω détermine alors totalement l'algèbre, donc la variété correspondante. Dans le cas général, cette donnée n'est plus suffisante. En se basant sur des idées introduites par Demazure et Flenner-Zaidenberg dans le cas des tores de dimension 1, Altmann et Hausen ont développé une théorie permettant de décrire ces algèbres graduées, et donc les variétés affines correspondantes, par une donnée géométrico-combinatoire:

- une variété algébrique Y de dimension égale à la codimension d'une orbite générale du tore dans X (cette codimension étant appelée *complexité* de l'action considérée) jouant le rôle d'un espace d'orbite universel pour l'action du tore; et
- une combinaison linéaire finie $\mathcal{D} = \sum P_i \cdot D_i$ d'hypersurfaces D_i de Y à coefficient dans un certain semi-groupe de polyèdres à sommets dans le réseau M.

Dans ce formalisme, le plan affine $\mathbb{C}^2$ muni de l'action de $\mathbb{C}^*$ définie par $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$ se décrit par le couple $(Y, \mathcal{D}) = (\mathbb{P}^1, 1 \cdot \mathrm{pt})$ tandis que le même plan muni de l'action de $\mathbb{C}^*$ définie par $t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y)$ se décrit par le couple $(Y, \mathcal{D}) = (\mathbb{A}^1, [0, 1] \cdot \mathrm{pt})$.

Le contexte général de cette thèse concerne l'étude des généralisations et extensions possibles de ce type de descriptions géométrico-combinatoires au cas des variétés définies sur des corps non algébriquement clos k, munies d'actions de tores non nécessairement scindés. Dans ce contexte, un tore est simplement un groupe algébrique abélien G sur k dont l'extension des scalaire à une clôture algébrique $\overline{k}$ de k est $\overline{k}$-isomorphe au tore $\mathbb{G}_{m,\overline{k}}^n$ où $\mathbb{G}_{m,\overline{k}} = (\overline{k}^*, \times)$. Un exemple élémentaire de tore non-scindé est le cercle $S_1 = SO_2(\mathbb{R})$, dont l'extension des scalaires au corps $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*, \times)$. L'objectif central de la thèse consiste dans un premier temps à développer, dans le cadre spécifique du corps des réels $\mathbb{R}$, une description géométrico-combinatoire complète des variétés réelles munies d'actions de tores réels analogue à celle d'Altmann et Hausen pour le corps des complexes. Cela implique de considérer et développer simultanément plusieurs axes complémentaires :

1. Tout tore réel est isomorphe est à un produit de tores de la forme $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}^{n_1} \times S_1^{n_2} \times (R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})^{n_3}$, où $R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ désigne la restriction de Weil de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$, appelé aussi *tore de Deligne* dans le contexte de la théorie de Hodge réelle. Un premier axe consiste donc à développer une description géométrico-combinatoire des variétés affines réelles munie d'actions de complexité 1 d'un tore réel donné. Le cas de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}^n$ est essentiellement similaire à la théorie de Altmann et Hausen pour $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Le cas de S_1 a été récemment décrit Dubouloz-Liendo sous forme d'une version Galois-équivariante de la théorie de Altman-Hausen pour $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Le passage de S_1 a S_1^n requiert de développer plus finement les aspects combinatoires Galois-équivariant pour les coefficients polyédraux correspondants. L'étude approfondie de $R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$, dont l'extension des scalaire à $\mathbb{C}$ est le tore $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^2$ de dimension 2, et des tores de la forme $(R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})^n$ devrait pouvoir s'envisager avec des techniques analogues de descente Galoisienne.

2. Un second axe concerne l'étude systématique des variétés toriques réelles non nécessairement affines munie d'une action de complexité 1 du tore $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}^{n_1} \times S_1^{n_2} \times (R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})^{n_3}$. On espère dans ce contexte particulier obtenir une description géométrico-combinatoire complète en terme de familles d'éventails à sommets dans un réseau M, invariants sous l'action d'une représentation du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}(M)$. Dans le cas de variétés toriques réelles complètes ou projectives, un prolongement naturel sera de développer les analogues de la théorie classique des variétés complexes toriques complètes, en terme d'un dictionnaire entre propriétés de géométrie convexe des éventails et propriétés géométriques des variétés toriques correspondantes.

3. Un troisième axe consiste à explorer la géométrie des variétés réelles avec actions de complexité supérieure d'un tore réel. Il s'agira plus spécifiquement dans cet axe d'étudier la topologie des lieux réels de ces variétés et les propriétés des actions différentiables des groupes de Lie réels induites sur ceux-ci par l'action algébrique du tore. Un point de départ dans cette direction consiste à étudier les variétés affines réelles de dimension 3 munie d'un action du tore S_1 dont les lieux réels sont des variétés différentielles compactes M de dimension 3, munie d'une action différentiable induire du groupe de Lie réel $SO_2(\mathbb{R})$.

Connaissances et compétences requises :
Le candidat devra avoir un bagage solide en géométrie algébrique et différentielle ainsi qu'une bonne connaissance de la théorie des groupes algébriques et des algèbres de Lie.