Interpolation polynomiale en rang supérieur

Daniele Faenzi

15 février 2019

Sujet de thèse

L'interpolation polynomiale classique consiste à chercher un polynôme qui prenne des valeurs préalablement fixées sur un certain nombre de points de l'espace, nommés points de contrôle ; de même on pourra imposer des valeurs à certaines dérivées partielles du polynôme.

Une réponse fondamentale à ce problème a été apportée dans une série d'articles des années 1980 à 2000, voir [AH95] ; on sait depuis lors que r points de contrôle doubles génériques imposent le nombre attendu de contraintes sur l'ensemble des polynômes de degré fixé, sauf pour un petit nombre d'exceptions que l'on sait classifier complètement.

La généralisation du problème qui nous intéresse consiste à remplacer les polynômes homogènes par les sections d'un fibré de rang quelconque. Le comportement des fibrés en question peut être très sauvage ; cependant en imposant des restrictions naturelles (fibrés semistables etc) on obtient déjà des résultats très intéressants, comme par exemple dans [CH14].

Un point de vue important sur ces questions est le lien entre, d'un côté l'interpolation en rang supérieur, et d'un autre côté les diviseurs effectifs sur le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}_n(\mathbb{P}^2)$ des sous schémas de longueur n de $\mathbb{P}^2$; en effet les sous-schémas n'ayant pas interpolation vis-à-vis d'un fibré donné forment, sous certaines conditions, un diviseur de $\mathrm{Hilb}_n(\mathbb{P}^2)$.

Les techniques faisant appel à des condition de stabilité de Bridgeland (cf. [Bri07]) développées dans ces travaux ont conduit aussi à des résultats intéressants sur le cône des diviseurs effectifs au-dessus d'autres espaces de modules, voir [CHW17].

On se propose dans cette thèse d'étudier le lien entre l'interpolation polynomiale et les diviseurs sur les espaces de modules de faisceaux au dessus d'une surface de dimension de Kodaira nulle, surtout des K3, des surfaces abélienne, probablement aussi des surfaces d'Enriques.

En effet, en d'appuyant sur les résultats concernant les conditions de stabilités sur ces surfaces, notamment [BM14], il est légitime d'espérer obtenir des résultats intéressants dans ce cadre. Il est attendu qu'un rôle important soit joué par l'arithmétique du réseau de Picard de la surface en question et par le théorème de Torelli global qui permet de décrire la géométrie des espaces de modules au-dessus de ces surfaces en termes du réseau de Beauville-Bogomolov-Mukai.

Aussi en dimension supérieure on pourrait envisager une étude de la composante principale du schéma de Hilbert ou d'autres espaces de module, par exemple l'espace de module des fibrés instantons, basée sur ces idées.

Références

[AH95] James Alexander and André Hirschowitz. Polynomial interpolation in several variables. *J. Algebraic Geom.*, 4(2) :201–222, 1995.

[BM14] Arend Bayer and Emanuele Macrì. MMP for moduli of sheaves on K3s via wall-crossing : nef and movable cones, Lagrangian fibrations. *Invent. Math.*, 198(3) :505–590, 2014.

[Bri07] Tom Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories. *Ann. of Math. (2)*, 166(2) :317–345, 2007.

[CH14] Izzet Coskun and Jack Huizenga. Interpolation, Bridgeland stability and monomial schemes in the plane. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 102(5) :930–971, 2014.

[CHW17] Izzet Coskun, Jack Huizenga, and Matthew Woolf. The effective cone of the moduli space of sheaves on the plane. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 19(5) :1421–1467, 2017.