Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé :
Géométrie des groupes d'Artin et espaces hyperconvexes

Intitulé en anglais :
Geometry of Artin groups ans hyperconvex spaces

Unité de recherche :
IMB, UMR 5584, CNRS, Université de Bourgogne Franche-Comté

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-encadrant) de thèse :
Directeur : Paris, Luis, lparis@u-bourgogne.fr
Co-encadrant : Haettel, Thomas, thomas.haettel@univ-montp2.fr

Domaine scientifique principal de la thèse :
Mathématiques

Domaine scientifique secondaire de la thèse :

Description du projet scientifique

Les groupes de tresses apparaissent naturellement dans de nombreux domaines de géométrie et de topologie : homéomorphismes de surfaces, théorie combinatoire des groupes, arrangements d'hyperplans, espaces de configurations, etc. (voir par exemple [KT08], [FM12]). La théorie géométrique des groupes veut étudier les propriétés des groupes grâce à leurs actions sur des espaces métriques. De ce point de vue-là la géométrie des groupes de tresses n'est que partiellement comprise : en tant que groupes modulaires de surface ils sont grossièrement médians (voir [Bow13]) et hiérarchiquement hyperboliques (voir [BHS15]). Cependant leur géométrie « fine » et non pas « grossière » est encore mystérieuse : notamment on ne sait pas s'ils sont à courbure négative au-delà de 6 brins (voir [BM10], [HKS16]).

Une autre notion de courbure négative, très récente, est celle d'hyperconvexité : un espace métrique est dit hyperconvexe si toute famille de boules s'intersectant deux à deux s'intersecte globalement. Un tel espace est alors contractile et, de plus, tout groupe agissant proprement et cocompactement sur un espace hyperconvexe vérifie certaines propriétés typiques de la courbure négative, notamment l'existence d'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis, ou encore la conjecture de Farrell-Jones. Urs Lang a initié l'étude moderne des groupes hyperconvexes (voir [Lan13]) en montrant notamment que tout groupe hyperbolique au sens de Gromov est hyperconvexe.

Dans un premier temps nous souhaitons faire étudier à la doctorante ou au doctorant les liens entre CAT(0) et hyperconvexité pour qu'elle ou il acquiert les rudiments du sujet. Cela permettra ensuite d'apporter des éléments de réponse à la question suivante : les groupes de tresses sont-ils hyperconvexes ? Une famille de groupes très naturelle où cette question se généralise est celle des groupes d'Artin. Dans le cas des groupes d'Artin à angles droits la géométrie est très bien connue grâce des complexes cubiques CAT(0) qui lui sont associés, et nous croyons que de telles constructions peuvent s'étendre à d'autre groupes sous une certaine forme. Les groupes d'Artin donnent de nombreux exemples où tester l'hyperconvexité. Remarquer qu'une telle propriété aurait comme conséquences notables qu'un tel groupe serait sans torsion et vérifierait la conjecture du K(π,1) et la conjecture de Farrell-Jones. Nous envisageons également l'étude d'autres propriétés de courbure négative telles que l'existence ou la non existence d'action sur un complexe cubique CAT(0), l'automaticité, l'hyperbolicité acylindrique, etc.

Le directeur de thèse, Luis Paris (IMB, Université de Bourgogne Franche-Comté), et le co-encadrant, Thomas Haettel (IMAG, Université de Montpellier), sont tous les deux des experts reconnus des groupes d'Artin. L'un est plus spécialisé sur ses aspects algébriques et combinatoires et l'autre plus sur ses aspects géométriques. Aussi, leurs compétences jointes devraient assurer un encadrement excellent de la doctorante ou du doctorant pour un tel sujet.

[BHS15] J. Behrstock, M. Hagen & A. Sisto – « Hierarchically hyperbolic spaces II : Combination theorems and the distance formula », (2015), arXiv :1509.00632.

[BM10] T. Brady & J. McCammond – « Braids, posets and orthoschemes », Algebr. Geom. Topol. 10 (2010), no. 4, p. 2277–2314.

[Bow13] B. H. Bowditch – « Coarse median spaces and groups », Pacific J. Math. 261 (2013), no. 1, p. 53–93.

[FM12] B. Farb & D. Margalit – Princeton Mathematical Series, A primer on mapping class groups 49 , Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[HKS16] T. Haettel, D. Kielak & P. Schwer – « The 6-strand braid group is CAT(0) », Geom. Dedicata 182 (2016), p. 263–286.

[KT08] C. Kassel & V. Turaev – Graduate Texts in Mathematics, Braid groups 247, Springer, New York, 2008, With the graphical assistance of Olivier Dodane.

[Lan13] U. Lang – « Injective hulls of certain discrete metric spaces and groups », J. Topol. Anal. 5 (2013), no. 3, p. 297–331.

Connaissances et compétences requises : Le candidat devra maîtriser les notions de base de la théorie des groupes en particulier celles liées aux présentations des groupes (groupes libres, relations, graphes de Cayley, etc.). Quelques connaissances en géométrie hyperbolique au sens large serait aussi les bienvenues pour aborder le sujet.

Sujet à considérer dans le cadre de l'appel de I-SITE Bourgogne Franche-Comté : Non.