Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé :

Invariants de type fini pour les variétés graphées, et groupe de Torelli pour les surfaces

Intitulé en anglais :

Finite-type invariants for graph manifolds, and the Torelli group of surfaces

Unité de recherche :

UMR 5584, Université de Bourgogne & CNRS

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-encadrant) de thèse :

Massuyeau, Gwénaël (gwenael.massuyeau@u-bourgogne.fr)

Domaine scientifique principal de la thèse :

Topologie de petite dimension

Domaine scientifique secondaire de la thèse :

Topologie quantique

Description du projet scientifique

Le groupe de Torelli d'une surface est constitué des classes d'isotopie d'homéomorphismes de cette surface qui agissent trivialement sur son homologie. La structure du groupe de Torelli peut être approchée par l'étude *comparée* de deux filtrations sur ce groupe : d'un côté, sa suite centrale descendante et, de l'autre, la filtration « de Johnson » donnée par les noyaux des actions naturelles sur les quotients nilpotents successifs du groupe fondamental de la surface. On sait désormais qu'il existe (via les scindements de Heegaard) de très riches interactions entre cette étude en dimension deux et l'étude de certains invariants topologiques en dimension trois : il s'agit précisément des invariants « de type fini » des 3-variétés, auxquels on peut penser comme à des invariants « polynomiaux » étiquetés chacun d'un « degré ». Dans une direction, les invariants de type fini définissent des homomorphismes sur le gradué associé à la suite centrale descendante du groupe de Torelli, et permettent ainsi de comparer ce gradué à celui associé à la filtration de Johnson ; dans l'autre direction, les relations d'équivalence pour les 3-variétés que définissent les invariants de type fini de degré au plus n sont engendrées par des opérations chirurgicales qui mettent en jeu le *(n+1)*-ème terme de la suite centrale descendante du groupe de Torelli. Ces échanges entre dimension deux et dimension trois ont suscité diverses questions — et ils ont même motivé certaines conjectures — généralisant en tous degrés des résultats qu'avait démontrés Morita au début des années 90 pour l'invariant de Casson. (Ce dernier doit être vu, dans ce contexte, comme le plus simple des invariants de type fini à valeurs entières : il n'est que de degré 2.)

Dans cette thèse, nous nous proposerons d'étudier certains de ces problèmes — et d'éprouver certaines de ces conjectures — pour une classe particulière de 3-variétés : celles qui peuvent être « graphées » au sens de Waldhausen. Ces 3-variétés ont plusieurs avantages : elles sont classifiées, elles peuvent être construites simplement à partir de graphes décorés (par l'opération de « plombage »), et elles incluent, par exemple, les entrelacs de singularités isolées de surfaces complexes ; elles jouent aussi un rôle constitutif pour le théorème de décomposition « JSJ » des 3-variétés. L'étudiant.e s'intéressera principalement aux variétés graphées qui sont des sphères d'homologie : il s'agira d'étudier les éléments du groupe de Torelli donnant lieu à ce type de variétés (via les scindements de Heegaard), de calculer explicitement certains invariants de type fini pour ces variétés à partir des graphes qui les définissent … et d'en tirer les conclusions qui s'imposent !

Connaissances et compétences requises :

L'étudiant.e devra déjà être à l'aise avec les outils de base de la topologie algébrique (groupe fondamental, groupes d'homologie, etc.). Par ailleurs, une connaissance préalable des objets de la topologie de petite dimension (*mapping class groups* de surfaces, 3-variétés, etc.) et un premier contact avec la topologie différentielle (décompositions en anses, chirurgies, etc.) seront très profitables au démarrage de la thèse.

Sujet à considérer dans le cadre de l'appel de I-SITE Bourgogne Franche-Comté : Oui/Non