Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé :
Type de représentation des variétés et fibrés d'Ulrich

Intitulé en anglais :
Representation type of varieties and Ulrich bundles

Unité de recherche :
IMB Institut de Mathématiques de Bourgogne
UMR CNRS 5584

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-encadrant) de thèse :
FAENZI, Daniele (directeur)
daniele.faenzi@u-bourgogne.fr

Domaine scientifique principal de la thèse :
Mathématiques, géométrie algébrique

Domaine scientifique secondaire de la thèse :
Algèbre commutative, géométrie différentielle

Description du projet scientifique :
Voire descriptif en pièce jointe

Connaissances et compétences requises :
Cursus en mathématiques niveau M2, (idéalement niveau agrégation)
Géométrie différentielle, surfaces de Riemann, notions d'algèbre commutative, algèbre homologique, éléments de topologie algébrique.

Sujet à considérer dans le cadre de l'appel de I-SITE Bourgogne Franche-Comté :
Oui. Le projet pourrait s'inscrire notamment dans le projet I-SITE *Motivic Invariants of Algebraic Varieties,* porté par F. Déglise (IMB, Dijon) financé pour 3 ans (2018-2021).

Type de représentation des variétés et fibrés d'Ulrich

Daniele Faenzi

1^{er} mai 2018

Sujet de thèse

Les variétés algébriques sont des objets géométriques définis par des équations polynomiales. Un fibré algébrique est un espace vectoriel qui varie de façon polynomiale le long d'une variété algébrique : ces objets forment une catégorie de grande importance pour l'étude de la variété en question. Un invariant clé des fibré est leur cohomologie : les fibrés dont la cohomologie est aussi simple que possible, dits de Cohen-Macaulay, font l'objet d'une étude spécifique qui détermine le type de représentation de la variété.

En termes plus précis, une sous variété lisse projective X de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$ étant donnée, on dit que X est de type de représentation fini s'il n'existe qu'un nombre fini de fibrés de Cohen-Macaulay indécomposables au-dessus de X. C'est le cas de l'espace projectif lui-même, des quadriques, des courbes rationnelles et d'une famille de cas sporadiques de degré minimal selon la terminologie de Bertini. Sinon le type de représentation de la variété en question est infini, on parle alors de type apprivoisé ou sauvage selon la complexité de la catégorie des fibrés Cohen-Macaulay.

Plusieurs travaux, notamment [EH88, BGS87], puis plus récemment [FM17, FP15], ont permi de déterminer le type de représentation des variétés dont le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ est lui-même de Cohen-Macaulay.

Cependant, le type de représentation des variétés plus générales reste inconnu. L'étude de cette large thématique est le but principal de la thèse, qui pourrait envisager plusieurs aspects du sujet.

Le premier est la construction de fibrés de Cohen-Macaulay sur de larges classes de variétés et sous schémas, en commençant par les variétés irrégulières où on pourra utiliser des méthodes empruntées aux résultats d'annulation générique de Pareschi et Popa, en répondant ainsi dans certains cas à la question de l'existence de fibrés Cohen-Macaulay posée dans [Han05]. Aussi, on pourra regarder en détail le cas des sous schémas 2-réguliers, où des méthodes plus algébriques faisant intervenir les syzygies ont été mises au point par Eisenbud, Green, Hulek et Popescu, cf. [EGHP06].

Le deuxième pan principal des recherches envisagées par la thèse concerne les fibrés d'Ulrich. Ces fibrés, dont l'existence est conjecturée sur n'importe quel sous schéma fermé de $\mathbb{P}^N$, sont au coeur de la théorie de Boij-Söderberg développée par Eisenbud et Schreyer et de l'étude des formes de Chow (cf. [ESW03]) ; ils jouent aussi un rôle crucial dans la détermination du type de représentation des variétés.

Un premier objectif dans ce domaine est la construction de nouvelles classes d'exemples. En effet, on pourrait commencer par élargir la classe des variétés admettant des fibrés d'Ulrich à toutes les variétés de drapeaux linéaires, en utilisant la théorie des représentations de SL_n et la classification des fibrés homogènes en termes de carquois obtenue dans [OR06] pour construire des fibrés d'Ulrich à partir de représentations de carquois bien choisies.

Ensuite, on pourrait se servir des techniques faisant appel aux catégories dérivées inaugurées dans [Muk81] pour construire et classifier les fibrés d'Ulrich sur les variétés abéliennes, sachant que les surfaces abéliennes et K3 constituent une classe importante de variétés où ces fibrés ont été étudiés – quoique de façon non exhaustive, ces seuls cas pouvant réserver déjà un certain nombre de surprises. Dans cet esprit, une première analyse des complexes d'Ulrich pourra être réalisée, en généralisant la notion de fibré d'Ulrich au cadre purement catégorique.

Pour terminer, quelques applications pourront être envisagées à l'étude des variétés algébriques à canonique négatif ou trivial en termes des espaces de modules de faisceaux Cohen-Macaulay et d'Ulrich, dans l'esprit de [LMS15].

Des connaissances de base en géométrie algébrique sont souhaitables pour entreprendre cette thèse dans les meilleures conditions ; toute compétence en géométrie différentielle, algèbre commutative, algèbre homologique pourra aussi être très utile tout au long de la thèse.

Références

[BGS87] Ragnar-Olaf Buchweitz, Gert-Martin Greuel, and Frank-Olaf Schreyer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. II. *Invent. Math.*, 88(1) :165–182, 1987.

[EGHP06] David Eisenbud, Mark Green, Klaus Hulek, and Sorin Popescu. Small schemes and varieties of minimal degree. *Amer. J. Math.*, 128(6) :1363–1389, 2006.

[EH88] David Eisenbud and Jürgen Herzog. The classification of homogeneous Cohen-Macaulay rings of finite representation type. *Math. Ann.*, 280(2) :347–352, 1988.

[ESW03] David Eisenbud, Frank-Olaf Schreyer, and Jerzy Weyman. Resultants and Chow forms via exterior syzygies. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(3) :537–579, 2003.

[FM17] Daniele Faenzi and Francesco Malaspina. Surfaces of minimal degree of tame representation type and mutations of Cohen-Macaulay modules. *Adv. Math.*, 310 :663–695, 2017.

[FP15] Daniele Faenzi and Joan Pons-Llopis. The Cohen-Macaulay representation type of arithmetically Cohen-Macaulay varieties. *ArXiv e-print math.AG/1504.03819*, 2015.

[Han05] Douglas Hanes. On the Cohen-Macaulay modules of graded subrings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(2) :735–756, 2005.

[LMS15] MartíLahoz, Emanuele Macrì, and Paolo Stellari. Arithmetically Cohen-Macaulay bundles on cubic threefolds. *Algebr. Geom.*, 2(2) :231–269, 2015.

[Muk81] Shigeru Mukai. Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves. *Nagoya Math. J.*, 81 :153–175, 1981.

[OR06] Giorgio Ottaviani and Elena Rubei. Quivers and the cohomology of homogeneous vector bundles. *Duke Math. J.*, 132(3) :459–508, 2006.