Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2011-2012
Novembre 2011

Algèbre
Corrigé du partiel

Question 1.

(1) Soit $v \in V$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{B}$, $e'_1, \ldots, e'_m \in \mathcal{B}'$, $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n + t'_1 e'_1 + \cdots t'_m e'_m \,.$$

Alors

$$\pi(v) = t_1 \pi(e_1) + \cdots + t_n \pi(e_n) + t'_1 \pi(e'_1) + \cdots + t'_m \pi(e'_m) = t'_1 \pi(e'_1) + \cdots + t'_m \pi(e'_m) \,.$$

Ceci montre que $\pi(\mathcal{B}')$ engendre V/U.

Soient $m \in \mathbb{N}$, $e'_1, \ldots, e'_m \in \mathcal{B}'$ et $t'_1, \ldots, t'_m \in \mathbb{K}$ tels que $t'_1 \pi(e'_1) + \cdots + t'_m \pi(e'_m) = \overrightarrow{0}$. Posons $v = t'_1 e'_1 + \cdots + t'_m e'_m$. On a $\pi(v) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $v \in \operatorname{Ker} \pi = U$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{B}$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$. On a

$$(-t_1) e_1 + \cdots + (-t_n) e_n + t'_1 e'_1 + \cdots + t'_m e'_m = v - v = \overrightarrow{0} \,,$$

donc $t_1 = \cdots = t_n = t'_1 = \cdots = t'_m = 0$. Ceci montre que $\pi(\mathcal{B}')$ est libre.

(2) Soit $\phi : V_1 \times V_2 \to \frac{V_1}{U_1} \otimes \frac{V_2}{U_2}$ l'application définie par

$$\phi(v_1, v_2) = \overline{v_1} \otimes \overline{v_2} \,.$$

On observe que ϕ est bilinéaire, donc elle induit une application linéaire $\varphi : V_1 \otimes V_2 \to \frac{V_1}{U_1} \otimes \frac{V_2}{U_2}$. Par construction cette application envoie $v_1 \otimes v_2$ sur $\overline{v_1} \otimes \overline{v_2}$ pour tout $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$.

(3) Soit $(u_1, v_2) \in U_1 \times V_2$. Alors

$$\varphi(u_1 \otimes v_2) = \overline{u_1} \otimes \overline{v_2} = \overrightarrow{0} \otimes \overline{v_2} = \overrightarrow{0} \,.$$

Comme $U_1 \otimes V_2$ est engendré par $\{u_1 \otimes v_2 \mid (u_1, v_2) \in U_1 \times V_2)\}$, on en déduit que $U_1 \otimes V_2 \subset \operatorname{Ker} \varphi$. De même, $V_1 \otimes U_2 \subset \operatorname{Ker} \varphi$, donc $(U_1 \otimes V_2) + (V_1 \otimes U_2) \subset \operatorname{Ker} \varphi$.

(4) L'ensemble $\hat{\mathcal{B}}_1$ est une base de $U_1 \otimes V_2$ et $\hat{\mathcal{B}}_2$ est une base de $V_1 \otimes U_2$, donc $\hat{\mathcal{B}}_1 \cup \hat{\mathcal{B}}_2$ engendre $(U_1 \otimes V_2) + (V_1 \otimes U_2)$. Soit $\hat{\mathcal{B}} = \{e_1 \otimes e_2 \mid (e_1, e_2) \in \tilde{\mathcal{B}}_1 \times \tilde{\mathcal{B}}_2\}$. Alors $\hat{\mathcal{B}}$ est une base de $V_1 \otimes V_2$ et $\hat{\mathcal{B}}_1 \cup \hat{\mathcal{B}}_2 \subset \hat{\mathcal{B}}$, donc $\hat{\mathcal{B}}_1 \cup \hat{\mathcal{B}}_2$ est libre.

Soit

$$\hat{\mathcal{B}}_0 = \hat{\mathcal{B}} \setminus (\hat{\mathcal{B}}_1 \cup \hat{\mathcal{B}}_2) = \{e_1 \otimes e_2 \mid (e_1, e_2) \in \mathcal{B}'_1 \times \mathcal{B}'_2\} \,.$$

Notons $\hat{\pi} : V_1 \otimes V_2 \to \frac{V_1 \otimes V_2}{(U_1 \otimes V_2)+(V_1 \otimes U_2)}$ la projection canonique. Alors, par (1), $\hat{\pi}(\hat{\mathcal{B}}_0)$ est une base de $\frac{V_1 \otimes V_2}{(U_1 \otimes V_2)+(V_1 \otimes U_2)}$.

(5) Soit $(e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1' \times \mathcal{B}_2'$. On observe que $\hat{\varphi}(\pi(e_1 \otimes e_2)) = \varphi(e_1 \otimes e_2) = \overline{e_1} \otimes \overline{e_2}$. Comme $\hat{\mathcal{B}}_0$ est une base de $\frac{V_1 \otimes V_2}{(U_1 \otimes V_2)+(V_1 \otimes U_2)}$ et $\{\overline{e_1} \otimes \overline{e_2} \mid (e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1' \times \mathcal{B}_2'\}$ est une base de $\frac{V_1}{U_1} \otimes \frac{V_2}{U_2}$, ceci montre que $\hat{\varphi}$ envoie bijectivement une base sur une base, donc est un isomorphisme.

Question 2.

(1) L'application $\varphi : V^* \times V \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi(\alpha, v) = \alpha(v)$ est une application bilinéaire. Elle induit donc une application linéaire $\mathrm{Tr} : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$.

Soient $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V et $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale de B. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ on définie l'endomorphisme $\varphi_{i,j} : V \to V$ par

$$\varphi_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } k = i \\ \vec{0} & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Rappelons que $\varphi_{i,j}$ s'identifie à $e_i^* \otimes e_j$ par l'isomorphisme $\mathcal{L}(V) \simeq V^* \otimes V$. En particulier,

$$\mathrm{Tr}(\varphi_{i,j}) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Soient $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$(\varphi_{i,j} \circ \varphi_{k,l})(e_r) = \begin{cases} e_j & \text{si } r = k \text{ et } l = i \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\varphi_{i,j} \circ \varphi_{k,l} = \begin{cases} \varphi_{k,j} & \text{si } l = i \\ 0 & \text{si } l \neq i \end{cases}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Tr}(\varphi_{i,j} \circ \varphi_{k,l}) = \mathrm{Tr}(\varphi_{k,l} \circ \varphi_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = i \text{ et } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(3) Soient $f \in \mathcal{L}(V)$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de f dans la base B. On a

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \varphi_{i,j}\,,$$

donc

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \mathrm{Tr}(\varphi_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\,.$$

(2) Soient $f, g \in \mathcal{L}(V)$. Soient $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $M' = (m'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les matrices de f, g dans la base B, respectivement. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(f \circ g) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_{i,j} m'_{k,l} \mathrm{Tr}(\varphi_{i,j} \circ \varphi_{k,l}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m'_{k,l} m_{i,j} \mathrm{Tr}(\varphi_{k,l} \circ \varphi_{i,j}) \\
&= \mathrm{Tr}(g \circ f)\,.
\end{aligned}$$

(4) Soit $T : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $T(f \circ g) = T(g \circ f)$ pour tous $f, g \in \mathcal{L}(V)$. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. On a

$$\varphi_{i,j} \circ \varphi_{i,i} = \varphi_{i,j} \text{ et } \varphi_{i,i} \circ \varphi_{i,j} = 0\,,$$

donc $T(\varphi_{i,j}) = T(0) = 0$. Par ailleurs

$$\varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,i} = \varphi_{j,j} \text{ et } \varphi_{j,i} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,i}\,,$$

donc $T(\varphi_{i,i}) = T(\varphi_{j,j})$. Posons $\lambda = T(\varphi_{1,1})$. Alors, par ce qui précède, $T = \lambda\,\mathrm{Tr}$.