

# Géométrie différentielle

R. Langevin

November 14, 2008

Version pré-pré-préliminaire, partielle, sans  
garantie...

# Contents

<b>1</b>	<b>Courbes planes</b>	<b>5</b>
1.1	Paramétrisation . . . . .	5
1.1.1	Peano . . . . .	5
1.1.2	Tangente . . . . .	6
1.1.3	L'image de l'application $c$ dans le plan . . . . .	7
1.1.4	Classes, de $\mathcal{C}^1$ à $\mathcal{C}^\omega$ . . . . .	8
1.2	Équation . . . . .	8
1.3	Longueur . . . . .	8
1.3.1	Longueur d'arc . . . . .	9
1.4	Courbure . . . . .	9
1.4.1	Vecteur tangent et courbure . . . . .	9
1.4.2	Ordre de contact . . . . .	10
1.4.3	Cercles osculateurs . . . . .	10
1.5	Utilisation de la courbure des courbes planes . . . . .	13
1.5.1	Caracterisation à isométrie affine près . . . . .	13
1.6	L'application de Gauss. . . . .	14
1.6.1	Graphes, courbure et application de Gauss . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Courbes de <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>17</b>
2.1	Courbure et torsion . . . . .	17
2.1.1	Contact d'une courbe avec des droites, des plans et des cercles . . . . .	18
2.1.2	Courbure de projections particulières d'une courbe . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Surfaces dans l'espace</b>	<b>21</b>
3.0.3	surfaces paramétrées . . . . .	25
3.0.4	Somme connexe de surfaces compactes sans bord . . . . .	27
3.0.5	Une définition . . . . .	28
3.0.6	Surfaces données par une équation . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Exemples de surfaces "abstraites" et cartes</b>	<b>31</b>
4.1	cartes . . . . .	31
4.2	Espaces fibrés . . . . .	32
4.3	Espace tangent à partir de cartes . . . . .	34

<b>5</b>	<b>Métrie riemannienne et métrie riemannienne induite si la surface est dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Sections d'une surface de <math>\mathbb{R}^3</math> et Euler</b>	<b>39</b>
6.1	Courbures principales d'une surface en un point . . . . .	39
6.1.1	Euler . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Contact d'une sphère et d'une surface; application de Gauss</b>	<b>49</b>
7.1	Équation locale d'une surface et sphères osculatrices . . . . .	49
7.2	L'application de Gauss . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Projections</b>	<b>55</b>
8.1	Projection d'une surface sur une droite . . . . .	55
8.2	Projection d'une surface sur un plan . . . . .	56
<b>9</b>	<b>Surfaces polyédriques de <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>57</b>
9.0.1	Theorema egregium polyédrique . . . . .	58
9.0.2	Théorème de Gauss-Bonnet polyédrique . . . . .	59
9.0.3	Projections sur les droites de surfaces polyédriques . . . . .	60
9.0.4	Aire et approximation polyédrique . . . . .	60
<b>10</b>	<b>Variétés abstraite: définitions et quelques exemples</b>	<b>61</b>
10.1	Métries riemanniennes en dimension $n$ . . . . .	61
10.1.1	géodésiques . . . . .	63
10.1.2	Le "theorema egregium" de Gauss . . . . .	64
10.1.3	Le théorème de Gauss-Bonnet . . . . .	64
<b>11</b>	<b>Variétés de dimension plus grande que 2, encore des exemples!</b>	<b>65</b>
<b>12</b>	<b>Appendice</b>	<b>67</b>
12.1	Le théorème de Sard . . . . .	67
12.2	Équation d'Euler-Lagrange et principe de d'Alembert . . . . .	67
12.2.1	Principe de d'Alembert . . . . .	68
12.3	Enveloppes de droites . . . . .	69
12.3.1	Enveloppe des normales à une courbe plane . . . . .	71

Citons Gaspard Monge ([Mo1] page 62) : *Il faut donc que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations de l'analyse et celles de la géométrie ; il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture.*

# Chapter 1

## Courbes planes

Vous aurez plus souvent à trouver vous-mêmes une manière analytique de décrire une courbe donnée par un dessin qu'à "tracer la courbe"...

Cependant commençons par inventorier différentes manières de se donner des courbes planes.

### À partir d'une suite de points

Attention il faut connaître, où pouvoir reconstruire, l'ordre des points.

- un polygone.
- Splines

## 1.1 Paramétrisation

On se donne deux fonctions d'une variable réelle  $t$  (vous pouvez penser "temps")

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

### 1.1.1 Peano

Attention, si l'on suppose seulement que les deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  sont des fonctions continues de  $t$ , beaucoup de choses peuvent arriver.

En 1890, G. Peano, [Pea], construit une courbe qui remplit un carré. L'idée de la démonstration est de construire une suite de fonctions  $f_n$  du segment dans le carré d'images une suite de courbes polygonales  $C_n$  qui sont "de plus en plus denses"; la suite converge uniformément vers une fonction  $f$  qui sera continue et surjective. La figure 1.1 montre comment passer de  $f_0$  à  $f_1$ ; il suffit de répéter le procédé sur chaque carré d'une subdivision de taille  $\frac{1}{3^n}$  pour construire la suite  $f_k$ .

L'article de Peano [Pea] écrit directement des formules utilisant des coordonnées en base 3.

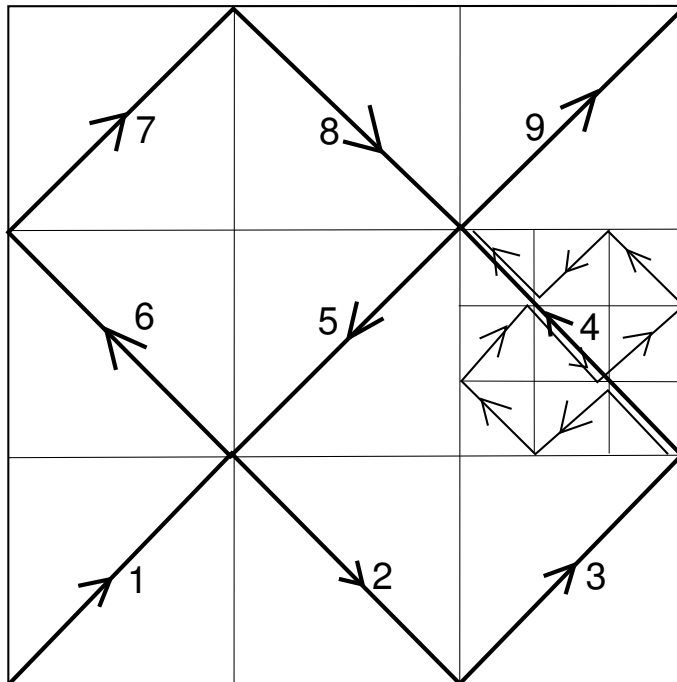


Figure 1.1: Construction de la courbe de Peano

Un an plus tard, D. Hilbert propose une construction analogue pour laquelle les courbes successives  $C_n$  sont plongées. L'article de Hilbert [Hi] est illustré de figures (l'une est à peu près la figure ??).

### L'île de Von Koch

Le nom "fractal" a été inventé, sans doute vers 1975, par B. Mandelbrot. Cependant des exemples d'objets fractals étaient connus bien plus tôt.

Von Koch en 1906 a construit une courbe "en flocon de neige" (figure 1.2):

Cette courbe est la limite uniforme d'une suite de courbes  $C_n$  définies par récurrence: pour obtenir  $C_{n+1}$ , il suffit de remplacer chaque segment de  $C_n$  par une ligne polygonale à 4 cotés, comme indiqué à droite de la figure 1.2.

On en déduit immédiatement l'égalité:  $\text{longueur}(C_{n+1}) = \frac{4}{3} \cdot \text{longueur}(C_n)$ . La courbe limite n'est donc pas rectifiable.

### 1.1.2 Tangente

Afin d'éviter les "monstres" fractals il est maintenant naturel de se restreindre à de applications admettant en chaque point une dérivée. Nous supposons même dans ce cours l'application  $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (au moins) de classe  $\mathcal{C}^1$ . Nous demanderons le plus souvent ici qu'en chaque point le vecteur dérivé  $\dot{c}(t)$  soit non nul.

Il suffit d'examiner la courbe donnée par

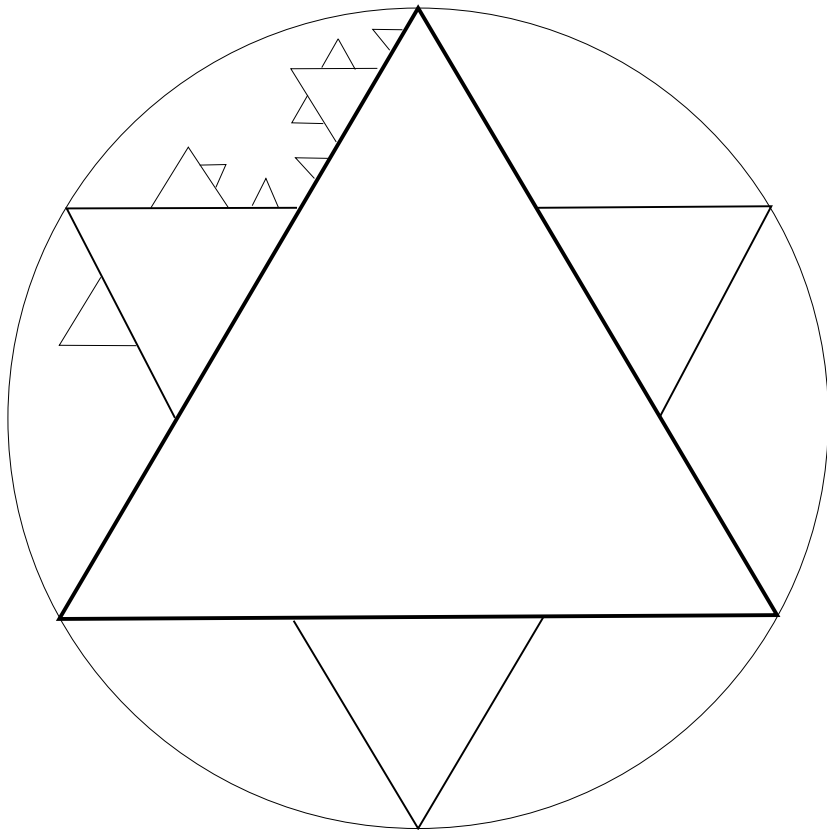


Figure 1.2: La courbe de Von Koch

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t^3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

pour comprendre ce que nous souhaitons éviter maintenant.

Pour chaque valeur  $t_0$ , le vecteur  $\dot{c}(t)$  permet de construire une droite  $D_{t_0}$  passant par le point  $c(t_0)$ . L'image d'un voisinage  $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$  de  $t_0$  est un arc de courbe que l'on peut voir comme un graphe d'une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $D_{t_0}$  dans, disons,  $(D_{t_0})^\perp$ . Bien sûr, la droite  $D_{t_0}$  est la tangente en  $c(t_0)$  à l'arc de courbe <sup>1</sup>

### 1.1.3 L'image de l'application $c$ dans le plan

Il sera commode par la suite d'éviter le plus souvent les points doubles. Nous imposerons même presque toujours la condition encore plus forte suivante:

$$\forall m \in C, \exists v \subset \mathbb{R}^2 | C \cap v \subset v \simeq ]-1, 1[ \subset ]-1, 1[ \times ]-1, 1[ \tag{1.3}$$

<sup>1</sup>Toutes ces précautions parce que le point  $c(t_0)$  peut être un point multiple de la courbe image de  $c$ .

Ici  $\simeq$  veut dire il existe un difféomorphisme qui envoie  $C \cap v \subset v$  sur le modèle  $] - 1, 1[ \subset ] - 1, 1[ \times ] - 1, 1[$ .

On évite ainsi, non seulement les points doubles, mais aussi que la courbe puisse s'accumuler sur elle-même.

### 1.1.4 Classes, de $\mathcal{C}^1$ à $\mathcal{C}^\omega$

Nous venons, pour obtenir une tangente en chaque point, d'imposer que l'application  $c$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$ . Nous pouvons imposer des ordres de différentiabilité plus élevés,  $\mathcal{C}^3$ ,  $\mathcal{C}^3$ ,  $\dots$   $\mathcal{C}^\infty$  et même analytique (que l'on notera  $\mathcal{C}^\omega$ ).

Remarquons que les constructions en collant des morceaux de courbes de classe  $\mathcal{C}^k$  et même  $\mathcal{C}^\infty$  sont possibles. Il en va différemment en classe  $\mathcal{C}^\omega$ . On sait en effet que la donnée des coefficients d'une série entière convergente déterminent la fonction somme sur tout l'intérieur du segment (ou disque suivant que la variable est réelle ou complexe) de convergence. Á fortiori, la donnée de la fonction sur un petit voisinage d'un point détermine la fonction analytique sur tout le segment de convergence de sa série de Taylor au point.

## 1.2 Équation

**Proposition 1** - Les lignes de niveau d'une fonction  $\{F(x, y) = c\}$  sont des courbes ayant une tangente en chaque point si  $\text{grad}(F) \neq 0$  en tout point où  $F(x, y) = c$ .

voir : théorème des fonctions implicites.

- Dans ce cas, l'équation de la tangente en un point  $(x_0, y_0) \in \{F = 0\}$  est donnée par  $\langle \text{grad}(F) | (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0$ .

- La valeur de la norme de  $\text{grad}(F)$  permet de dire si localement les niveaux de  $F$  sont serrés (valeur grande) ou écartés (valeur petite).

Aux points où  $\text{grad}(F) = 0$  "tout" peut arriver.

### Exemples

- point isolé :

$$F(x, y) = x^2 + y^2; x_0 = 0, y_0 = 0$$

- croisement transverse :

$$F(x, y) = x^2 - y^2; x_0 = 0, y_0 = 0$$

- point de rebroussement de première espèce :

$$F(x, y) = x^3 - y^2; x_0 = 0, y_0 = 0$$

etc...

## 1.3 Longueur

**Rappel** Longueur d'une ligne polygonale.

Rappelons la définition d'une courbe rectifiable de  $\mathbb{R}^2$  compacte :

**Définition 2** La courbe  $C = \{c(t) \mid t \in [0, T]\}$ , est dite rectifiable si la borne supérieure des sommes  $\sum_{\mathcal{P}} |c(t_{i+1}) - c(t_i)|$  prise sur tous les suites  $\mathcal{P} = 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ ;  $n \in \mathbb{N}$  est finie.

### 1.3.1 Longueur d'arc

Rappelons d'abord

**Proposition 3** Une courbe  $C$  où l'application  $c$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  est rectifiable. La borne supérieure  $\sup_{\mathcal{P}} \sum_{\mathcal{P}} |c(t_{i+1}) - c(t_i)|$  est égale à l'intégrale  $\int_{[0, T]} \dot{c}(t) dt$ .

Posons  $s(t) = \int_0^t |\dot{c}(t)| dt$ . Si, pour tout  $t$ ,  $\dot{c}(t) \neq 0$  l'application  $t \mapsto s(t)$  est un difféomorphisme. Notons le  $\varphi$ . L'application  $c \circ \varphi^{-1} : [0, \text{longueur}(C)] \mapsto \mathbb{R}^2$  a la propriété d'avoir en tout point un vecteur tangent  $T(s) = \frac{dc \circ \varphi^{-1}}{ds}$  de norme 1. On dira dans ce dernier cas que la courbe  $C$  paramétrée par  $s$  est paramétrée par la longueur de l'arc.

## 1.4 Courbure

### 1.4.1 Vecteur tangent et courbure

Supposons maintenant que les courbes considérées sont données par des applications de classe  $\mathcal{C}^2$  et sont paramétrées par la longueur de l'arc; on notera de nouveau  $c$  où  $c(s) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la paramétrisation de  $C$ , et  $T(s) = \dot{c}(s)$  le vecteur unitaire tangent à la courbe en  $c(s)$  (le choix entre les deux vecteurs unitaires tangents possible découle de la paramétrisation de la courbe; bien sûr une paramétrisation va avec un sens de parcours sur cette courbe et oriente cette courbe).

Supposons aussi, au moins dans un premier temps, que l'application  $c$  est injective.

Nous pouvons maintenant considérer l'application  $T : [0, T] \rightarrow \mathbf{S}^1$  qui associe à chaque valeur de  $s$ , ici puisque l'application  $c$  est injective, à chaque point de la courbe, le vecteur tangent  $T(s)$ . Nous allons observer la vitesse à laquelle tourne le vecteur  $T(s)$  lorsque le point  $c(s)$  se déplace sur la courbe  $C$ .

Le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  est orienté. En chaque point  $c(s)$  de la courbe  $C$  choisissons un vecteur normal unitaire  $N(s) = \mathcal{R}_{\pi/2}$ .

**Définition 4** La courbure  $k(s)$  de la courbe  $C$  en  $c(s)$  est définie par  $\frac{dT}{ds} = k(s) \cdot N(s)$ .

Remarquons que la courbure de la courbe plane  $C$  en un point est un nombre réel. Nous verrons que l'on devra se contenter de définir une courbure qui est positive ou nulle lorsque la courbe est dans  $\mathbb{R}^3$ .

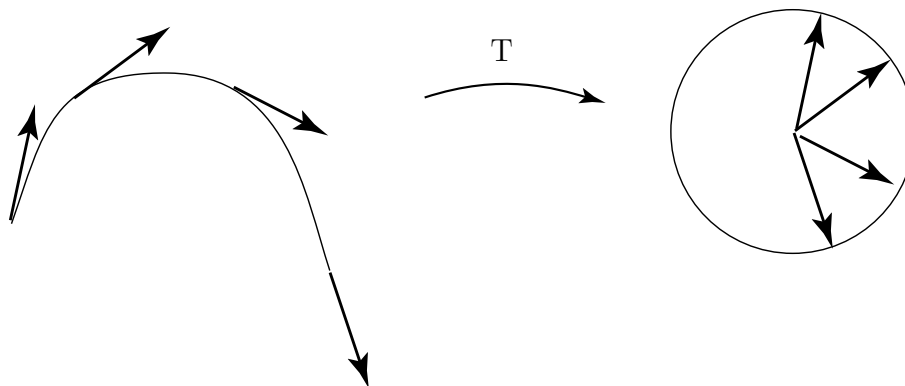


Figure 1.3: Comment tourne le vecteur tangent

### 1.4.2 Ordre de contact

Commençons par comparer au voisinage de l'origine une courbe  $C$  donnée par une équation de la forme  $y = f(x)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  (elle passe par l'origine et a une tangente horizontale en l'origine), et les droites affines du plan.

Une droite affine  $D$  peut (voir figure 7.3) :

- (1) ne pas passer par l'origine. La distance  $\delta$  entre un point de  $C$  voisin de l'origine et un point de la droite est "de l'ordre de 1" c'est à dire ne tend pas vers 0 quand le point sur la courbe tend vers l'origine.
- (2) passer par l'origine sans être tangent à la courbe. La distance  $\delta$  d'un point de la courbe proche de l'origine à la droite est du même ordre que la distance du point à l'origine (et aussi du même ordre que la coordonnée  $x$  du point et du même ordre que la longueur de l'arc de la courbe joignant le point à l'origine).
- (3) passer par l'origine et être tangente à la courbe ( $D$  est la tangente à la courbe en  $O = (0, 0)$ ). La distance  $\delta$  entre  $m$  et la droite tangente  $D$  est négligeable par rapport à  $|x|$ , et, si la courbe est le graphe d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , de l'ordre de  $x^2$  en général; cette distance peut cependant être négligeable par rapport à  $x^2$ , par exemple si la courbe  $C$  traverse sa tangente en l'origine.

### 1.4.3 Cercles osculateurs

Nous supposons dans ce paragraphe que la courbe  $C$  est de classe au moins  $\mathcal{C}^3$ , et est, au voisinage de l'origine, le graphe d'une fonction  $f$  satisfaisant  $f(0) = f'(0) = 0$ .

Nous pouvons écrire un développement de Taylor de  $f$  au voisinage de 0 :

$$f(x) = f''(0)x^3 + O(x^3).$$

(rappelons que  $O(x^3)$  désigne un terme de l'ordre de  $x^4$  ou éventuellement négligeable devant  $x^3$ )

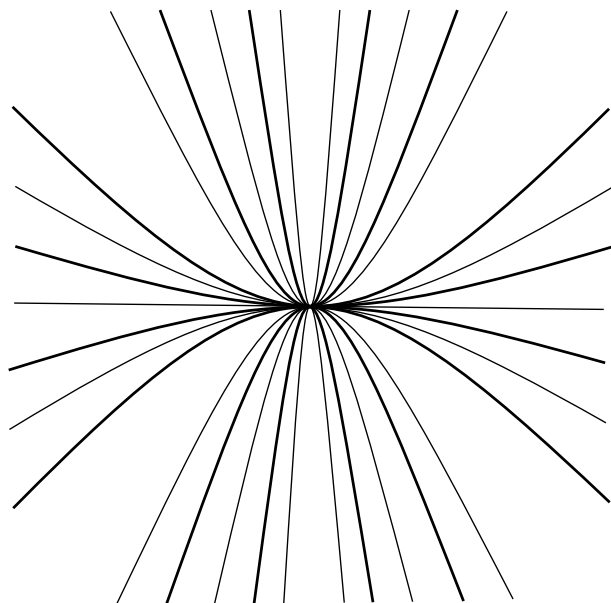


Figure 1.4: Famille de paraboles tangentes

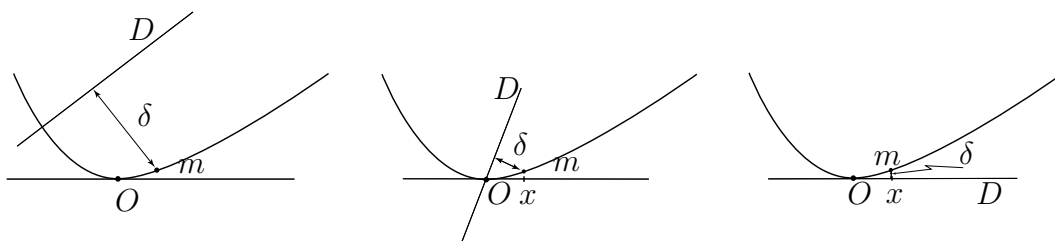


Figure 1.5: Ordre de contact d'une droite et d'une courbe

Nous pouvons reprendre la discussion précédente en remplaçant les droites par des cercles.

Lorsque le cercle ne passe pas par l'origine ou n'est pas tangent à la courbe en l'origine, rien de nouveau.

Il nous reste à estimer la distance d'un point  $m$  de la courbe voisin de l'origine à un cercle tangent à la courbe en l'origine.

Pour cela considérons tous les cercles tangents à la courbe en l'origine. Ils forment un faisceau de cercles tangents (voir figure 1.6).

Pour estimer la distance du point  $m$  au cercle  $\Gamma_R$  de rayon  $R$  et tangent à la courbe  $C$  en l'origine  $O$ , il suffit d'estimer la "distance verticale" entre  $m$  et  $\Gamma_R$ .

Pour cela remarquons que l'équation du cercle  $\Gamma_R$  est  $(y - R)^2 + x^2 = R^2$ , ou encore  $y^2 - 2R \cdot y + x^2 = 0$ . Nous savons que, au voisinage de l'origine, la coordonnée  $y$  d'un point de  $\Gamma_R$  est de l'ordre de  $x^2$ , donc  $y^2$  est de l'ordre de  $x^4$ .

Si nous souhaitons voir un arc de  $\Gamma_R$  au voisinage de l'origine comme un graphe, le

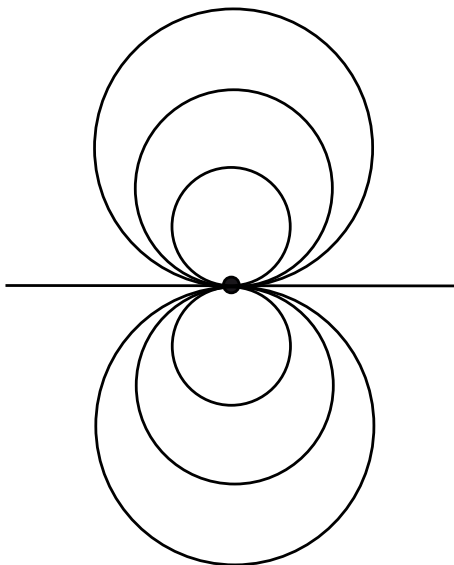


Figure 1.6: Faisceau de cercles tangents

développement de Taylor en l'origine de cette équation est de la forme :

$$y = \frac{x^2}{2R} + O(x^4)$$

(rappelons que  $O(x^4)$  désigne un terme de l'ordre de  $x^4$  ou éventuellement négligeable devant  $x^4$ ).

La “distance verticale” entre le point  $x, f(x)$  et le cercle tangent centré au point  $(0, R)$  est donc la différence

$$f(x) - \frac{x^2}{2R} + O(x^4) = (f''(0) - 2R)x^2 + O(x^3).$$

Pour tous les cercle du faisceau sauf un, la distance verticale est de l'ordre de  $x^2$ . Le cercle exceptionnel pour lequel  $\frac{1}{2R} = f''(0)$  (on admet  $R = \infty$  dans ce cas le cercle est la tangente (horizontale) à  $C$ ) est appelé *cercle osculateur*.

**Remarque :**

Les cercles osculateur à un arc de courbe de classe  $\mathcal{C}^3$  pour lequel la dérivée de la courbure a un signe constant sont les uns dans les autres et “presque tangents (théorème de Kneser voir figure 1.7). Une démonstration utilise le fait que la courbe des centres de ces cercles est l'enveloppe des normales à la courbe.

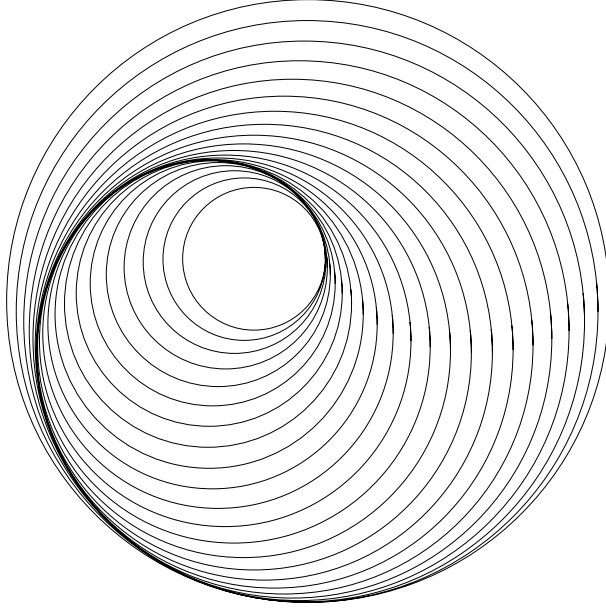


Figure 1.7: Cercles osculateurs à un arc de courbe

## 1.5 Utilisation de la courbure des courbes planes

### 1.5.1 Caractérisation à isométrie affine près

Nous voulons montrer ici qu'à une isométrie affine du plan près, une courbe régulière  $C$  paramétrée par la longueur de l'arc est entièrement déterminée si l'on connaît sa courbure  $k(s)$  en fonction de la longueur d'arc  $s$ .

Pour cela il sera commode d'utiliser une coordonnée complexe pour chaque point du plan. On considère donc une application  $s \mapsto c(s) \in \mathbb{C}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe pour tout  $s$  une dérivée première non nulle  $\dot{c}(s)$  (*la vitesse*), ici un vecteur, et une dérivée seconde continue (*l'accélération*).

Comme  $\dot{c}(s)$  ne s'annule pas, l'argument  $\text{Arg}(\dot{c}(s))$  est bien défini partout. C'est un angle ou un réel "modulo  $2\pi$ ". Cela permet de définir une application à valeur réelle:  $s \mapsto \phi(s)$  définie à une constante appartenant à  $2\pi\mathbb{Z}$ , telle que :

$$\dot{c}(s) = \frac{dc}{ds} = e^{i\phi(s)}.$$

Nous appellerons la fonction  $\phi$  la *fonction angulaire* de la courbe.

Calculons l'accélération en fonction de  $\phi(s)$  :

$$\ddot{c}(s) = \frac{d^2c}{ds^2} = i \frac{d\phi}{ds} e^{i\phi(s)}.$$

L'accélération est orthogonale (pour la structure euclidienne de  $\mathbb{C}$ ) à la vitesse  $\dot{c}(s)$ .

On en déduit la relation suivante entre la courbure  $k(s)$  et la dérivée angulaire  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$  :

$$k(s) = \dot{\phi}(s) = \frac{d\phi}{ds}.$$

Ainsi, pour tout  $s$ ,  $\phi(s) = \phi(0) + \int_0^s k(\sigma) d\sigma$  et  $c(s) = c(0) + \int_0^s e^{i\phi(\sigma)} d\sigma$ .

Nous pouvons maintenant montrer le :

**Théoreme 5** Soit  $k$  une fonction continue définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  contenant 0. Dans le plan euclidien, que nous identifions avec le plan complexe  $\mathbb{C}$ , étant donné un point  $c_0$  et un vecteur tangent  $u_0 = e^{i\phi_0}$ , il existe une unique courbe  $c$  paramétrée par la longueur d'arc de courbure  $k(s)$  à l'instant  $s$  et telle que :  $c(0) = c_0$  et  $\dot{c}(0) = u_0$ .

**Démonstration :** Étant donnée la fonction  $k$ , définissons les fonctions  $\phi$  et  $c$  par :

$$\phi(s) = \phi_0 + \int_0^s k(\sigma) d\sigma \quad c(s) = c_0 + \int_0^s e^{i\phi(\sigma)} d\sigma \quad (1.4)$$

La fonction réelle  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et a pour dérivée  $k$ , tandis que  $c$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  et a pour dérivée  $e^{i\phi(s)}$ , et est donc paramétrisée par la longueur de l'arc  $s$  et a pour courbure  $k(s)$ . Nous avons vu plus haut que cela détermine la courbe  $C$ .  $\square$

## 1.6 L'application de Gauss.

Inspiré par l'usage en dimension 2, nous appellerons *application de Gauss*  $\gamma$  l'application qui à chaque point  $m$  d'une courbe orientée  $C$  associe le vecteur normal,  $N(m) = R_{-\pi/2}(T(m))$  où  $T(m)$  le vecteur tangent unitaire au point  $m$  (déterminé puisque la courbe est orientée) à la courbe.

$$\gamma : C \rightarrow S^1$$

Cette application est bien sur étroitement liée à l'application  $T$  que nous avons considérée plus haut (1.4.1) :  $\gamma = R_{-\pi/2} \circ T$ .

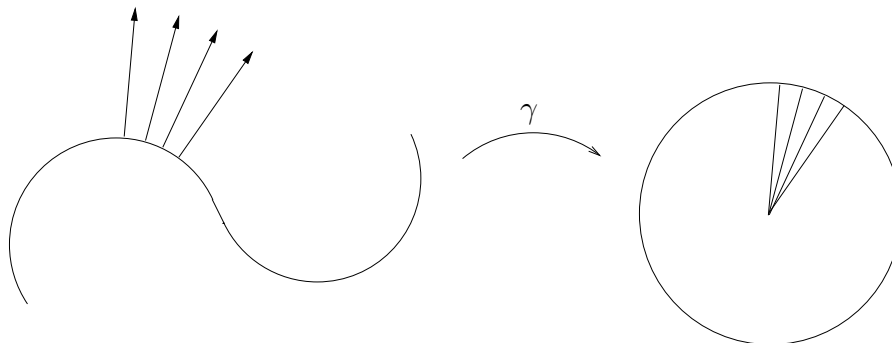


Figure 1.8: The Gauss map.

Un avantage de l'application de Gauss est que sa différentielle  $d\gamma : T_m C \rightarrow T_{\gamma(m)} \mathbf{S}^1$  peut être vue comme la multiplication par un nombre réel; en effet les deux droites  $T_m C$  et  $T_{\gamma(m)} \mathbf{S}^1$  sont parallèles.

Paramétrons de nouveau la courbe  $C$  par la longueur d'arc  $s$ .

**Proposition 6** *La différentielle  $d\gamma/ds$  satisfait la relation :  $d\gamma/ds = k(s) \cdot T(s)$ , où  $k(s)$  est la courbure que nous avons défini plus haut.*

### 1.6.1 Graphes, courbure et application de Gauss

Nous allons de nouveau utiliser l'équation locale  $y = f(x)$  ( $m(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ ) d'une courbe au voisinage d'un point  $m_0$  en choisissant comme axes de coordonnées la tangente à  $C$  en  $m_0$  et la droite normale à  $C$  en  $m_0$ . Nous choisissons enfin le système de coordonnées de sorte que le point  $m_0$  soit l'origine.

**Proposition 7** *Supposons que le point  $m_0 \in C$  ne soit pas un point critique de l'application de Gauss, c'est à dire qu'en  $m_0$  la courbure  $k_0$  est non nulle. Le point  $m_0$  est alors un point critique non dégénéré de la projection orthogonale de  $C$  sur l'axe  $Oy$  qui est la droite  $\mathbb{R} \cdot N(m_0)$ . La dérivée  $f''(0)$  est égale à la courbure  $k_0$  et l'équation locale de la courbe commence par un terme en  $x^2$  qui est  $\frac{k_0}{2}$  :*

$$y = \frac{k_0}{2}x^2 + o(x^2).$$

**Démonstration :** en utilisant nos coordonnées locales, la normale  $N(m)$  s'écrit :

$$N(m) = \frac{\text{grad}(F)}{|\text{grad}(F)|}, \text{ où } F(x, y) = y - f(x).$$

on a :

$$\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{1}{|\text{grad}(F)|} \begin{pmatrix} f'' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{dx}{ds} + \text{grad}(F) \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{|\text{grad}(F)|} \right) \cdot \frac{dx}{ds}.$$

en  $m_0$ , nous avons  $\text{grad}(F) \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{|\text{grad}(F)|} \right) = 0$ , et donc :  $d\gamma(m_0) = f''(0) = k(m_0)$ . La différentielle de l'application de Gauss  $d\gamma(m_0)$  est nulle exactement quand la partie quadratique de  $f$  est nulle.  $\square$



# Chapter 2

## Courbes de $\mathbb{R}^3$

*Pour éviter des notations lourdes, et pour pouvoir définir sans ambiguïté le vecteur tangent  $T(m)$  en un point  $m$ , nous ne considérerons que des courbes  $C$  plongées.*

### 2.1 Courbure et torsion

Nous avons défini la courbure  $k(m) \in \mathbb{R}$  d'une courbe plane en un point, en utilisant le choix d'un vecteur normal qui dépend de l'orientation du plan. Nous ne pouvons pas faire de même dans l'espace. Cependant nous pouvons définir en chaque point  $m \in C$  une courbure positive  $k(m)$ .

Comme nous pouvons retourner dans l'espace une courbe plane, en faisant pivoter son plan autour d'un axe contenu dans ce plan, nous changeons ainsi l'orientation du plan et donc nous changerions le signe de la courbure, si nous avions commis l'erreur d'en choisir un.

Une fois de plus nous allons utiliser une application à valeurs dans la sphère unité. The orientation of the curve  $C$  determines the choice of a unitary tangent vector  $T(m)$  at each point  $m \in C$ . This defines a map:

$$\begin{aligned} T : C &\rightarrow S^2 \\ m &\mapsto T(m). \end{aligned}$$

The speed with which the tangent vector turns,  $k(s) = \left| \frac{dT}{ds} \right|$  is the curvature of  $C$ . It is therefore the quotient of infinitesimal lengths  $d\tau$  on  $T(C)$ ,  $ds$  on  $C$ :  $k = \left| \frac{dT}{ds} \right|$ , is the curvature of  $C$  at  $m$ . This arc-length of  $T(C)$  in  $S^2$  will substitute the angle variation used for plane curves. The angle between two nearby tangent vectors is equivalent to  $d\tau$ .

At a point  $m \in C$  where the curvature is different from zero, one can define a unitary frame: the *Frenet frame*. The first vector of this frame is  $T(m)$  (or  $T$ ). The second is  $N(m) = \frac{dT}{ds}(m) / \left| \frac{dT}{ds}(m) \right|$  (as before, we may omit the reference to  $m$ ). The third is  $B(m) = T(m) \wedge N(m)$ .

The first two vectors  $T, N$  define a plane  $P$  called the *osculating plane* at  $m$ . It deserves the name because locally it is the closest to  $C$ . If we compute the distance from

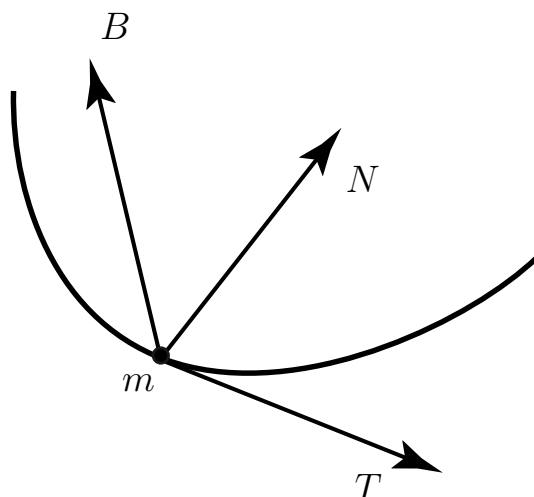


Figure 2.1: Le repère de Frenet

a point  $c(s) \in C$  to  $P$ , where  $s$  is the oriented arc-length on  $C$  with origin  $m$ , then the distance  $d(c(s), P)$  is at most of the order of  $s^3$  (it means  $\exists A > 0, \exists \epsilon$  such that  $\forall |s| < \epsilon$   $d(c(s), P) < A \cdot s^3$ ).

For all other planes, the distance will be of the order of a non-zero constant (if the plane does not contain  $m$ ), of the order of  $s$  if the plane contains  $m$  but is not tangent to  $C$ , and of the order  $s^2$  if the plane is tangent to  $C$  but not osculating. This discussion relies strongly on the fact that the curvature at  $m$  is not zero.

We can now obtain a matrix (called the *Frenet matrix*), the column of which are the coordinates in the basis  $(T, N, B)$  of the vectors  $\frac{dT}{ds}$ ,  $\frac{dN}{ds}$  and  $\frac{dB}{ds}$ .

As the vectors form a unitary basis, the matrix is antisymmetric. Let us write it as:

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

The number  $\tau$  is called the torsion of the curve at  $m$ . The use of  $k$  in the Frenet matrix is coherent with our previous notation  $|k|$  for the curvature. The absolute value  $|\tau|$  measures the speed  $|\frac{dB}{ds}|$  with which the osculating plane turns. As the vector  $B$ , the torsion can be defined only at points where the curvature is different from zero.

### 2.1.1 Contact d'une courbe avec des droites, des plans et des cercles

### 2.1.2 Courbure de projections particulières d'une courbe

Let us look at a given space curve from different points “far enough” from the curve so that the different shapes we can see are the same we can observe projecting the curve

Figure 2.2: Projection sur le plan (N,B)

orthogonally on different planes.

Let us first consider the orthogonal projections of a curve  $C$  of non-zero curvature  $k$  at  $m$  on particular planes through  $m$ .

- Projection on planes containing the tangent vector  $T$  at  $m$

Using euclidian coordinates  $(x, y, z)$  corresponding to Frenet frame at  $m$ , one can use  $x$  as a local parameter of  $C$ . When  $C$  is smooth enough we get  $y = ax^2 + \mathcal{O}(x^3)$   $z = \mathcal{O}(x^3)$ . euclidian coordinates in a plane containing  $m$  and  $T$  are:  $x, u \cos \theta x + \sin \theta z$ , where  $\theta$  is the angle of the plane  $P_\theta$  with the osculating plane to  $C$  at  $m$ .

The orthogonal projection  $C_\theta$  of  $C$  on  $P_\theta$  is given by:  $u = \cos \theta a \cdot x^2 + \mathcal{O}(x^3)$  proving that, as the coefficient of  $x^2$ , the curvature of the projection at  $m$  is obtained multiplying the curvature of  $C$  at  $m$  by  $\cos \theta$ . In particular, when  $\theta = \pi/2$  the curvature at  $m$  of the projection is zero. In general  $m$  is an inflexion point of the projection.

- Projection on planes containing the principal normal  $N$  at  $m$

Euclidean coordinates in the plane  $P_\phi$  are  $(y, \cos \phi \cdot x + \sin \phi \cdot z)$ , where  $\phi$  is the angle of  $P$  with the osculating plane to  $C$  at  $m$ . Therefore, in the neighbourhood of  $m$ , we have:  $x = \frac{w}{\cos \phi} + \mathcal{O}(w^3)$ . This implies that  $y = a \cdot \frac{1}{(\cos \phi)^2} w^2 + \mathcal{O}(w^3)$ , proving that the curvature of orthogonal projection  $C_\phi$  of  $C$  on  $P$  is obtained multiplying the curvature of  $C$  at  $m$  by  $\frac{1}{(\cos \phi)^2}$ .

Generically (when  $z(x)$  starts with a non-zero term in  $x^3$ ) the projection of the curve  $C$  on the plane generated by the vectors  $N$  and  $B$  has a cusp. This fits with the fact the curvature of  $C_\phi$  at  $m$  goes to  $\infty$ .



# Chapter 3

## Surfaces dans l'espace

Figure 3.1: Graphe

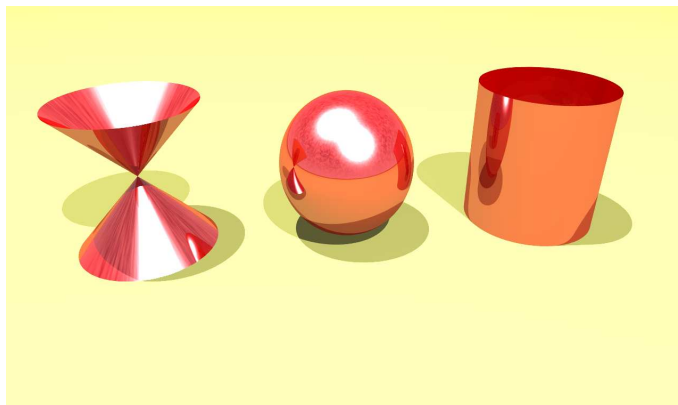


Figure 3.2: Sphère, cône et Cylindre

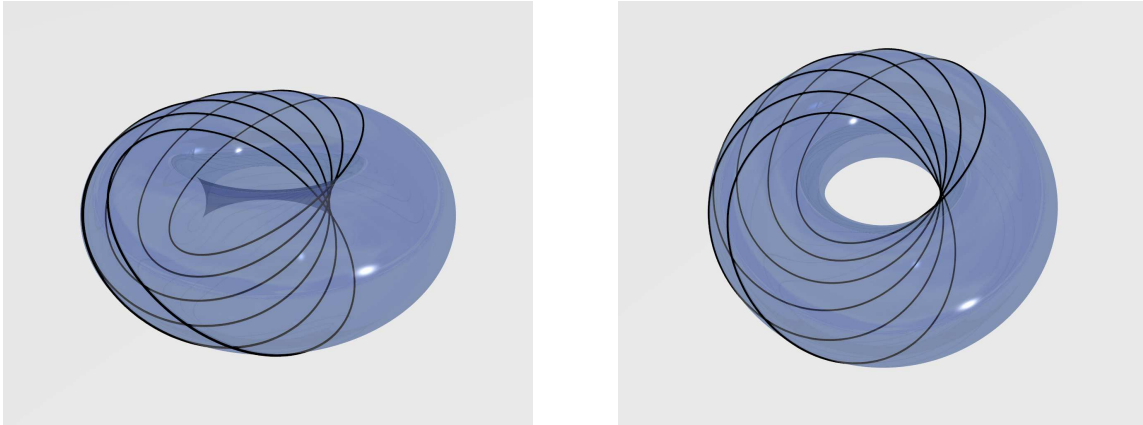


Figure 3.3: Tore et cercles de Villarceau

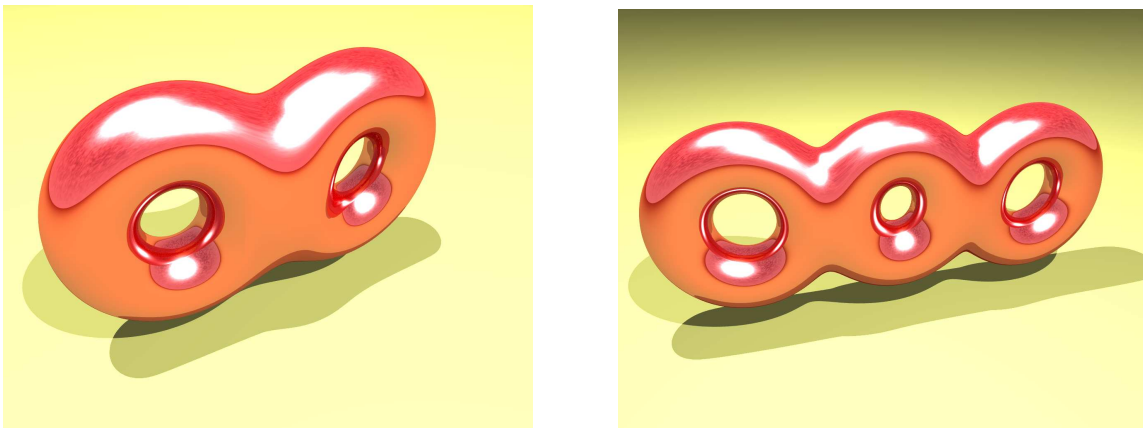


Figure 3.4: Tore à deux et à trois trous

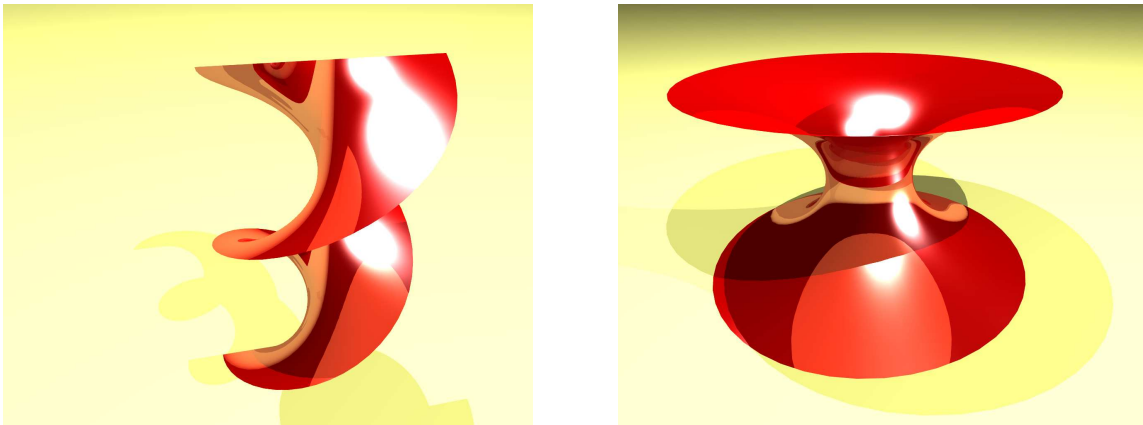


Figure 3.5: Hélicoïde et catenoïde

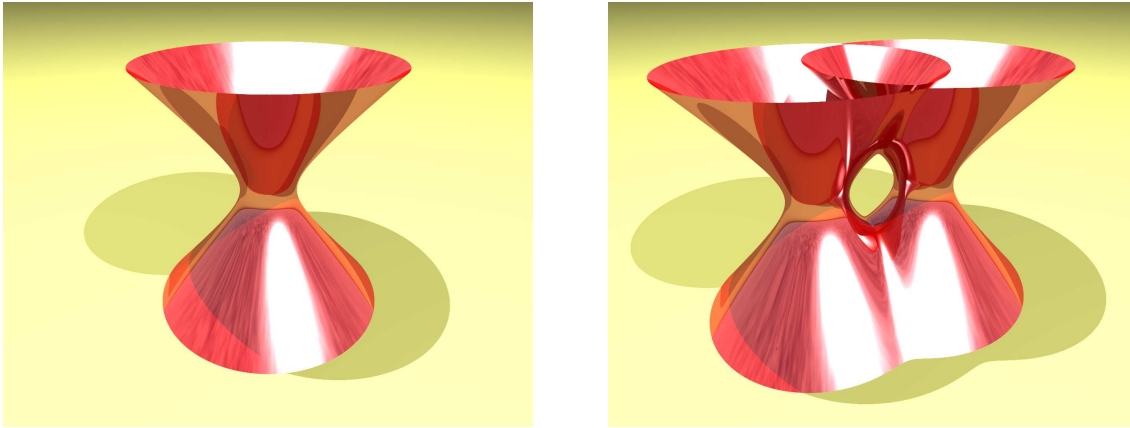


Figure 3.6: Hyperboloïde et hyperboloïde d'Hadamard



Figure 3.7: Parapluie de Whitney

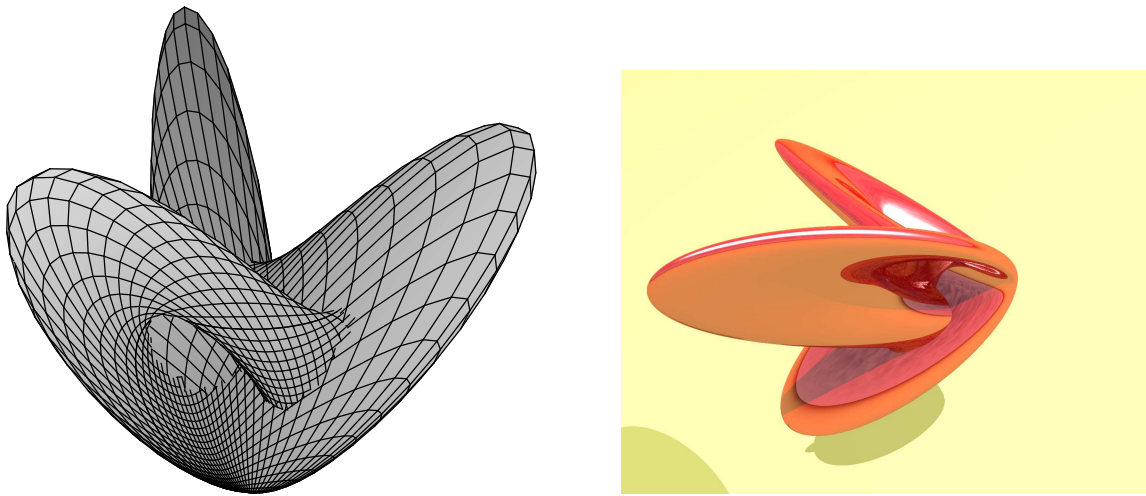


Figure 3.8: La Surface de Boy et Apery

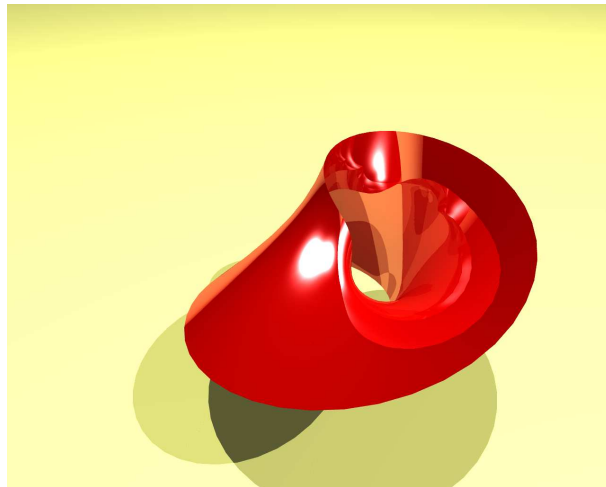


Figure 3.9: Bande de Moebius

### Exemples, suite - un plan

- une famille de surfaces lisses : les graphes de fonctions lisses (partout définies)  $z = f(x, y)$ . La projection orthogonale de la surface sur le plan horizontal est un difféomorphisme.

- autre surfaces paramétrées :

- un paramétrage d'un tore de révolution d'axe  $Oz$  est :

$$x = (a + r \cos \theta) \cos \phi \quad (3.1)$$

$$y = (a + r \cos \theta) \sin \phi \quad (3.2)$$

$$z = \sin \theta \quad (3.3)$$

- un paramétrage d'un hélicoïde est :

$$x = \cos \theta \cdot t \quad (3.4)$$

$$y = \sin \theta \cdot t \quad (3.5)$$

$$z = \theta \quad (3.6)$$

### 3.0.3 surfaces paramétrées

En chaque point d'un graphe, qui est une surface paramétrée de la forme :  $x = x, y = y, z = f(x, y)$  admet un plan tangent engendré par les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial f / \partial x \end{pmatrix}$

et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix}$ .

Nous avons déjà donné deux exemples de surfaces paramétrées qui ne sont pas des graphes : le tore de révolution et l'hélicoïde ; ces deux surfaces admettent en tout point un plan tangent.

On peut, en utilisant deux paramètres réels, espérer obtenir des surfaces "raisonnables" à partir de trois fonctions  $x(u, v), y(u, v)$  et  $z(u, v)$ . Cependant, sans condition sur les

fonctions, rien ne garantit l'existence, au voisinage du point  $m(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ ,

l'existence d'un petit morceau de surface qui puisse s'écrire localement, après un choix convenable des coordonnées, comme un graphe du type précédent.

**Proposition 8** *Si les fonctions  $x(u, v), y(u, v)$  et  $z(u, v)$  sont lisses et que les deux vecteurs  $\begin{pmatrix} \partial x(u, v) / \partial u \\ \partial y(u, v) / \partial u \\ \partial z(u, v) / \partial u \end{pmatrix}$  engendrent un plan, il existe un voisinage de  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$*

dont l'image soit un morceau de surface qui soit "un graphe au dessus de son plan tangent" c'est à dire tel que la projection orthogonale du morceau de surface sur son plan tangent en  $\begin{pmatrix} \partial x(u, v)/\partial u \\ \partial y(u, v)/\partial u \\ \partial z(u, v)/\partial u \end{pmatrix}$  soit un difféomorphisme (du morceau de surface sur son image).

Ce n'est pas le cas de la surface paramétrée :

$$\begin{pmatrix} x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta \\ z(\rho, \theta) = \rho \end{pmatrix}$$

cone de révolution d'axe  $Oz$  et de sommet  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

ni de la surface paramétrée :

$$\begin{pmatrix} x(u, v) = u \\ y(u, v) = uv \\ z(u, v) = v^2 \end{pmatrix}$$

au voisinage de  $(u, v) = (0, 0)$  (voir figure 9.3).

On remarque que les intersections de cette dernière surface avec les plans horizontaux  $z = z_0 > 0$  sont formées de deux droites dont l'angle est de plus en plus aiguü lorsque  $z_0$  tend vers 0.

### - Surfaces de révolution

Faisons maintenant tourner une courbe régulière  $\Gamma$  contenue dans le demi-plan  $\{x > 0, y = 0\}$ . Soit  $\Gamma_\theta$  l'image de la courbe par une rotation d'axe  $Oz$  d'angle  $\theta$ . Si  $g(x, z) = 0$  est une equation de  $\Gamma$ , la réunion  $S = \bigcup_\theta \Gamma_\theta$  est une surface régulière d'équation :  $f(x, y, z) = g(r, z) = 0$ , où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . La différentielle de  $f$  est :

$$df = \frac{x}{r} \frac{\partial g}{\partial x}(r, z) dx + \frac{y}{r} \frac{\partial g}{\partial x}(r, z) dy + \frac{\partial g}{\partial z}(r, z) dz.$$

Elle est non nulle en tous les points de la surface définie par  $g(r, z) = 0$  ( $r > 0$ ), puisque les deux dérivées partielles  $\frac{\partial g}{\partial x}$  et  $\frac{\partial g}{\partial z}$  ne peuvent être nulles simultanément sur la courbe régulière  $\Gamma$ .

Un cas particulier important est le *tore de révolution* (voir Figure??) défini par  $g(r, z) = (r-a)^2 + z^2 - R^2$  (with  $0 < R < a$ ). Son équation :  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - R^2 = 0$  peut être réécrite :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

La vérification de la régularité du tore de révolution à partir de cette équation est un peu fastidieuse.

### 3.0.4 Somme connexe de surfaces compactes sans bord

À partir de deux surfaces compactes  $S_1$  et  $S_2$ , nous pouvons construire une nouvelle surface appelée *somme connexe* de ces deux surfaces, que nous allons décrire sans entrer dans les détails.

Commençons par choisir un point  $p_1 \in S_1$  et un point  $p_2 \in S_2$ . Nous pouvons bouger  $S_2$  par une isométrie  $\Theta$  de sorte que les deux points  $p_1$  et  $p_2$  soient les extrémités d'un segment orthogonal aux deux plans tangents  $T_{p_1}(S_1)$  et  $T_{p_2}(\Theta(S_2))$  ( $\Theta$  est en particulier choisie de sorte que ces plans soient parallèles). On choisit de plus les points de sorte que les surfaces soient chacune entièrement d'un côté de leur plans tangents respectifs, ce qui permet de choisir l'isométrie  $\Theta$  de sorte que la zone contenant le segment  $]p_1, p_2[$  délimitée par ces deux plans tangents ne contienne aucun point des deux surfaces. Notons  $S'_2 = \Theta(S_2)$ .

Un fin cylindre de révolution d'axe  $[p_1, p_2]$  coupe  $S_1$  en une courbe  $c_1$ , et  $S_2$  en  $c_2$ . Ces deux courbes sont presque des cercles si le cylindre est assez fin. Découpons sur  $S_1$  le petit disque de bord  $c_1$  et sur  $S_2$  le petit disque de bord  $c_2$ , et remplaçons les deux disques par la partie du fin cylindre bordée par  $c_1$  et  $c_2$  (voir figure 3.10).

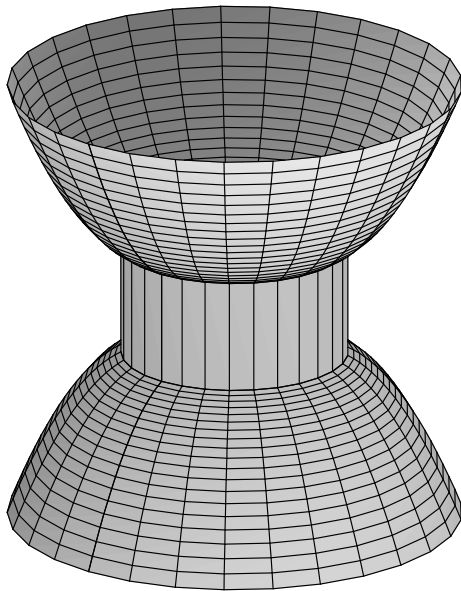


Figure 3.10: Somme connexe

Nous obtenons ainsi une surface anguleuse qu'il faut encore lisser, ce qui est fait figure 3.11.

Pour obtenir un lissage  $\mathcal{C}^\infty$ , il suffit d'utiliser la fonction  $e^{-1/x^2}$  après avoir remplacé les tores de révolution par des surfaces judicieusement aplaties là où il faudra coller le cylindre.

En répétant la somme connexe de tores de révolution on obtient une suite de surfaces.

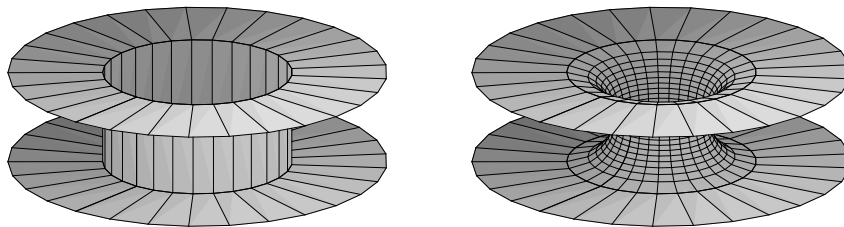


Figure 3.11: Sommes connexes

Une manière de montrer que ces surfaces sont toutes différentes (à difféomorphisme près) est de définir la caractéristique d'Euler, puis de démontrer que les surfaces de la série ont des caractéristiques d'Euler différentes.

### 3.0.5 Une définition

Nous venons de voir, qu'en gros une *surface* de  $\mathbb{R}^3$  est un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^3$  localement paramétré par deux variables réelles  $(u, v)$  (appelées les *coordonnées locales de  $S$  près du point  $p$* ); cela veut dire que pour chaque point  $p \in S$ , il existe un ouvert  $U_0 \subset \mathbb{R}^2$  et un homéomorphisme de  $U_0$  sur un voisinage  $V_0$  de  $p$  dans  $S$  (pour la topologie de  $S$  induite par celle de  $\mathbb{R}^3$ ).

Une telle définition grossière donne très peu d'information sur la manière dont  $S$  est incluse dans  $\mathbb{R}^3$ . De fait cela permet encore à  $S$  d'être incluse d'une manière très sauvage dans  $\mathbb{R}^3$ , comme le montre l'exemple de la *sphère à cornes d'ALEXANDER*.

Nous souhaitons que, près de chaque point  $p$  de  $S$ , une *troisième coordonnée* soit suffisante pour reconstruire un voisinage de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$ , de la même manière que  $\mathbb{R}^3$  est construit à partir de  $\mathbb{R}^2$  identifié à  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . En d'autres termes, près de  $p$ , un voisinage de  $p$  doit être topologiquement le produit d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  par un voisinage du point  $p$  de  $S$ .

**Définition 9** Une *surface (régulière) de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 0$ ) de  $\mathbb{R}^3$*  est un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que, pour chaque  $p \in S$ , il existe un difféomorphisme  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^k$  d'un voisinage ouvert  $U \subset \mathbb{R}^3$  de l'origine  $O = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  sur un voisinage ouvert  $V$  de  $p \in \mathbb{R}^3$ , qui envoie  $U \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  sur  $V \cap S$ .

Quand  $k = 0$ , un  $\mathcal{C}^0$ -difféomorphisme est simplement un homéomorphisme. On obtient, en composant  $\phi^{-1}$  avec la projection de  $U$  sur l'axe des  $z$ , une application d'un voisinage de  $m \in S$  sur un intervalle  $I$ . Cela montre que la surface est définie localement par une équation.

Le graphe d'une fonction réelle  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$  définie sur un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  est bien sûr une surface régulière de classe  $\mathcal{C}^k$ . Cette situation est générale : il suffit de déplacer  $S$  pour que le plan tangent au point qui nous intéresse soit horizontal.

**Théorème 10** Soit  $S$  une surface régulière de classe  $\mathcal{C}^k$ . Étant donné un point  $p \in S$ , il existe une isométrie affine  $\Theta$  telle que  $\Theta(p) = O = (0, 0, 0)$ , et telle qu'il existe un voisinage  $W$  de  $O$  tel que  $\Theta(S) \cap W$  est le graphe d'une fonction réelle  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$  définie sur un voisinage ouvert de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

**Démonstration :** C'est une conséquence du théorème d'inversion locale.  $\square$

### 3.0.6 Surfaces données par une équation

Nous considérons maintenant l'ensemble des points définis par une équation  $M = \{F(x, y, z) = 0\}$ . La fonction  $F$  est de classe suffisante, disons  $\mathcal{C}^\infty$  afin de ne pas entrer dans des considérations fines de classe de différentiabilité.

Le théorème des fonctions implicites permet de voir que, dès que  $\text{grad}F(m_0) = \text{grad}F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  l'intersection de  $F = 0$  et d'un voisinage assez petit de  $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$  est un graphe au dessus de l'un des plans de coordonnées.

**Proposition 11** Au voisinage d'un point  $m_0$  tel que  $\text{grad}F(m_0) \neq 0$ , l'ensemble  $M$  "mérite" le nom de surface et le plan tangent en  $m_0$  à cette surface a pour équation  $\langle \text{grad}F | X - m_0 \rangle = 0$ ; ce plan est donc orthogonal en  $m_0$  au vecteur  $\text{grad}F(m_0)$ .

On en déduit aussi que, localement, la surface peut s'écrire comme graphe au dessus de son plan tangent en  $m_0$ ; elle admet une équation locale de la forme :

$$z = f(x, y); \quad f(0, 0) = 0, \quad (\partial f / \partial x)(0, 0) = (\partial f / \partial y)(0, 0) = 0$$

Remarquons aussi que cette équation locale s'écrit :

$$z = f(x, y) = Q(x, y) + \text{Reste}$$

où  $Q(x, y)$  est une forme quadratique en  $(x, y)$  et "Reste", un terme négligeable devant  $|(x, y)|^2 = x^2 + y^2$ .

**Remarque :** En choisissant convenablement les axes orthonormés  $Ox$  et  $Oy$  dans le plan tangent on se ramène à la forme :

$$z = f(x, y) = ax^2 + by^2 + \text{Reste}$$

**Démonstration :** En diagonalisant simultanément la forme euclidienne  $x^2 + y^2$  et la forme quadratique  $Q(x, y)$ , on obtient la forme cherchée.  $\square$

#### Exemples

- Une sphère  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  de rayon non nul  $R$  et de centre le point  $(a, b, c)$  est définie par l'équation  $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2$ ; comme  $df_p$  ne s'annule qu'au centre  $p = (a, b, c)$  qui n'est pas sur  $S$ , c'est bien une surface lisse.
- Le cône  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$  est aussi une surface régulière hors de l'origine  $O$  où  $\text{grad}F = 0$ .
- Parmi les quadriques définie par une équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'xz + 2b''yz + cx + c'y + c''z + d = 0,$$

les seules qui ne sont pas des surfaces régulières sont les cônes, les réunions de deux plans et les plans comptés deux fois. Les autres (paraboloides elliptiques, paraboloides hyperboliques, ellipsoïdes, hyperboloïdes à une ou deux nappes, et les trois sortes de quadriques cylindriques) sont régulières (voir Figure 3.2 et [Au] [Be]).

## figure “quadriques” à compléter

Nous pouvons reformuler la proposition (11) à l'aide de l'application linéaire  $dF$  (de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ )

**Théorème 12** *Soit  $F$  une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^3$ , et soit  $U'$  le sous ensemble de  $U$  formé des points  $p$  où la différentielle  $dF_p$  n'est pas nulle. L'ensemble  $S = U' \cap F^{-1}(0)$  est alors une surface régulière de classe  $\mathcal{C}^k$ .*

**Démonstration :** On se contente d'utiliser le théorème de forme locale des submersions (ou des fonctions implicites un peu enrichi) comme pour la proposition (11)  $\square$

# Chapter 4

## Exemples de surfaces “abstraites” et cartes

$$\mathbf{T} = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

Construction en identifiant les cotés d’un rectangle.

Ruban de Möbius

Bouteille de Klein

$$\mathbb{P}_2 = \mathbf{S}^2 / (m \simeq -m)$$

Surfaces de genre  $g$  en identifiant les cotés d’un  $4n$ -gone ?

### 4.1 cartes

Les deux sections qui suivent sont largement inspirées du livre *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés* de F. Pham [Pha]. Nous pouvons maintenant définir une *variété topologique de dimension  $n$* :

**Définition 13** *Une variété topologique de dimension  $n$  est un espace topologique  $M$  dont tout point  $m$  admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appellera carte un tel homéomorphisme.*

**Remarque :** Nous supposons dans ce cours que  $M$  est un espace topologique séparé.

Étant données deux cartes :

$$\varphi_i : M \supset V_i \rightarrow U_i \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi_j : M \supset V_j \rightarrow U_j \subset \mathbb{R}^n,$$

on en déduit, lorsque  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , un *changement de carte* :  $\phi_{i,j} : U_i \supset \varphi_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \varphi_2(V_1 \cap V_2) \subset U_j$ ;  $\phi_{i,j} = (\varphi_2)^{-1} \circ \varphi_1$ .

Logiquement on appellera *atlas* (ici continu) une collection de cartes telle que les ouverts  $V_i$  sources des applications  $\varphi_i$  recouvrent  $M$ .

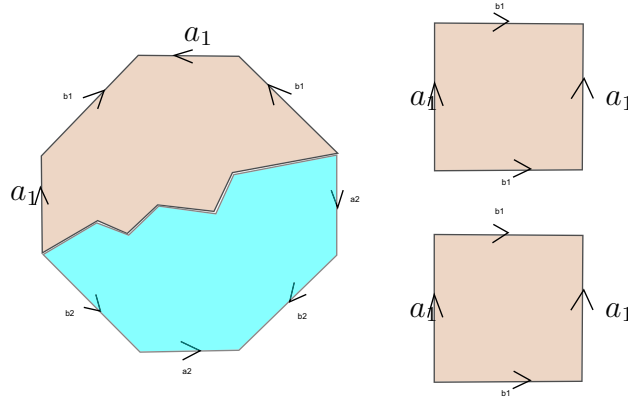
Figure 4.1: Surfaces de genre  $g$  vues comme quotient d'un polygone

Figure 4.2: Cartes et changements de cartes

**Remarque :** Si l'on veut permettre une construction par petits morceaux de la variété topologique en partant seulement d'un ensemble  $M$ , c'est possible en définissant seulement des applications  $\varphi_i$  mais en imposant que les changements de cartes soient des homéomorphismes. On ne peut cependant être sûr que le résultat soit séparé...

### variétés bidules

bidule = différentiable, de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , analytiques...

Il suffit maintenant d'exiger que tous les changements de cartes des atlas soient bidules.

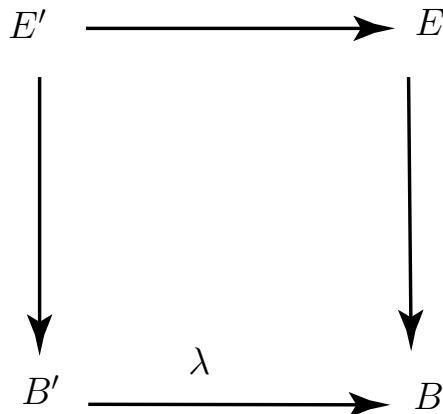
Bien sûr un mathématicien soigneux voudra pouvoir changer d'atlas en gardant la même structure bidule...

## 4.2 Espaces fibrés

L'idée est analogue à la construction des variétés mais avec un modèle de la forme  $U \times F$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $F$ , la *fibres* est souvent un espace vectoriel, une variété simple comme un cercle ou une sphère, un intervalle, parfois un groupe. Il faut aussi imposer non seulement que les changements de cartes envoient fibre sur fibre, mais encore que cela se fasse en respectant la structure de la fibre: application linéaire inversible si la fibre est un espace vectoriel etc., et de manière pas trop cahotique quand on change de fibre.

Soyons maintenant (un peu) plus précis.

**Définition 14** *Étant donnée une variété  $B$ , appelé base, on appellera espace au dessus de  $B$  la donnée d'un espace  $E$  et d'une application  $\pi_E : E \rightarrow B$ , que l'on appellera*

Figure 4.3: Morphismes entre espaces au dessus de  $\lambda : B \rightarrow B'$ 

*projection du fibré.*

On peut encore obtenir ainsi un peu n'importe quoi : penser à, dans  $\mathbb{R}^3$  un segment contenu dans l'axe des  $x$  auquel on attache en tout point rationnel une copie de  $] - 1, 1[$  parallèle à l'axe des  $y$  et en tout point irrationnel un segment  $] - 1, 1[$  parallèle à l'axe des  $z$ . On peut bien sûr faire tourner les segments de manière encore plus sauvage.

Modèle: produit.

Morphismes

**Définition 15** On dira que le fibré  $(E, \pi, B)$  est trivial s'il est isomorphe à  $(B \times F, p, B)$ , où  $p$  est la projection canonique du produit  $B \times B$  sur la base  $B$ . On appelle  $F$  la fibre du fibré trivial.

**Définition 16** On appellera espace fibré  $E, \pi_E$ , de base  $B$  et de fibre  $F$  un espace au dessus de  $B$  tel que tout point  $b \in B$  admet un voisinage  $V$  tel que  $(\pi^{-1}(V), \pi_E|_{\pi^{-1}(V)})$  soit un fibré trivial de base  $U$  et de fibre  $F$ .

**Définition 17** On dira qu'une application  $\sigma : B \rightarrow E$  est une section du fibré  $(E, \pi, B)$  si la composée  $\pi \circ \sigma$  est l'identité de la base  $B$ .

Un cas particulier important de fibré est le *fibré vectoriel*. La fibre  $F$  doit être un espace vectoriel. De plus on impose que les isomorphismes locaux  $E|_V \rightarrow U \times F$  envoient chaque fibre  $\pi^{-1}(b), b \in V$  sur  $F$  par un isomorphisme linéaire (application linéaire inversible). Si l'on considère maintenant un atlas de la base  $B$ :  $\{V_i, \phi_i, U_i\}$  tel que les ouverts  $V_i$  soient des ouverts tels que les restrictions  $E|_{V_i}, \pi, V_i$  soient triviales, on obtient pour un fibré vectoriel des cartes très spéciales de la forme  $U_i \times F$ . Les changements de cartes sont des applications  $\phi_{i,j} : U_i \times F \rightarrow U_j \times F$  dont la restriction à une fibre  $\iota^{-1}(u) \simeq F$  est un isomorphisme linéaire de  $F$  dans  $F$ .

### **4.3 Espace tangent à partir de cartes**

## Chapter 5

# Métrie riemannienne et métrie riemannienne induite si la surface est dans $\mathbb{R}^3$

Rappelons qu'un espace métrique  $X$  est la donnée d'un espace topologique séparé et d'une fonction *distance*  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui satisfait l'inégalité triangulaire  $d(m_1, m_3) \leq d(m_1, m_2) + d(m_2, m_3)$ , et, bien sur est nulle sur la diagonale  $\{(m, m)\} \subset X \times X$ .

L'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni de la distance euclidienne

$$d(m_1, m_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

est celui dans lequel vous avez l'impression de vivre.

Cette métrie est très particulière puisqu'elle vient d'une norme de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Nous avons déjà calculé dans cet espace la longueur de chemins de classe  $\mathcal{C}^1$ . Une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ , la sphère unité  $\mathbf{S}_1^2$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  par exemple, hérite de  $\mathbb{R}^3$  une métrie: la *métrie induite* lorsque que l'on calcule dans  $\mathbb{R}^3$  la distance de deux points de la sphère  $\mathbf{S}_1^2$ . Cette distance entre deux points  $m_1$  et  $m_2$  de la sphère est la longueur  $|m_1 - m_2|$  de la corde qui joint ces deux points dans  $\mathbb{R}^3$ . Tous les chemins tracés sur  $\mathbf{S}_1^2$  sont strictement plus longs que cette corde. qui plus est, si l'on considère tous les chemins  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  d'origine  $m_1$  et d'extrémité  $m_2$ ,  $\text{Inf}_\gamma \text{longueur}(\gamma) > |m_1 - m_2|$ . Afin de mieux comprendre pourquoi cette borne inférieure de longueur de chemin fournit une métrie naturelle sur la sphère unité, nous allons partir de la norme  $|\dot{\gamma}(t)|$  qui permet de calculer la longueur des chemins.

En chaque point  $m \in \mathbf{S}_1^2$ , l'espace tangent  $T_m \mathbf{S}_1^2$  hérite de  $\mathbb{R}^3$  une forme quadratique définie positive. Calculer la longueur de chemins tracés sur  $\mathbf{S}_1^2$  utilise seulement les forme quadratiques définies ainsi sur les espaces tangents aux différents points du chemin.

Nous pouvons maintenant oublier l'espace euclidien ambiant, et définir sur la sphère  $\mathbf{S}_1^2$  une *métrie riemannienne*: la donnée sur chaque espace tangent  $T_m \mathbf{S}_1^2$  d'une forme quadratique définie positive qui varie continument avec le point. La métrie riemannienne induite (venant de la métrie euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  est le premier exemple. Ce n'est



Figure 5.1: Riemann

pas une métrique sur la sphère. Cependant calculer la longueur des chemins permet de définir la distance de deux points  $m_1, m_2$  comme borne inférieure de la longueur des chemins joignant  $m_1$  à  $m_2$ :

$$d(m_1, m_2) = \text{Inf}_\gamma \text{longueur}(\gamma)$$

à terminer



# Chapter 6

## Sections d'une surface de $\mathbb{R}^3$ et Euler

Commençons par considérer les sections de la sphère unité par des plans passant par un point, disons le pôle nord  $(0,0,1)$ .

Nous pouvons, en utilisant la symétrie de révolution de la figure autour de l'axe vertical voir que toutes les sections contenant la normale sont des grands cercles de rayon 1.

Repérons maintenant un plan de section  $H$  passant par  $m_0$  par l'angle  $\phi$  qu'il fait avec le plan tangent.

hugé à finir + figure

Considérons ensuite un exemple clé : la surface d'équation  $z = ax^2 + by^2$ ;  $a \neq 0, b \neq 0, b < a$ .

Le vecteur  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est normal à la surface en l'origine. L'intersection de notre surface avec les plans verticaux, repérés par les coordonnées  $\rho, z$ , faisant un angle  $\theta$  avec le plan vertical  $Ox, Oz$  a pour équation  $z = (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta) \rho^2$ . C'est une parabole ou une droite dont la courbure en l'origine est  $k_\theta = 2[a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta]$ .

### 6.1 Courbures principales d'une surface en un point

#### 6.1.1 Euler

Dans [Eu1], Euler étend la notion de courbure définies pour les courbes aux surfaces. Pour cela il va couper une surface par tous les plans passant par un point et organiser les courbures en ce point des différentes sections. Il remarque d'abord, on peut se limiter à observer des sections contenant la normale en  $p$  au cylindre) qu'un cylindre n'est pas courbé dans la direction de ses génératrices, tandis que la courbure d'une



Figure 6.1: Leonhard EULER (1707-1783)

section passant par un point  $p$  qui contient la direction tangente perpendiculaire à la génératrice passant par  $p$  est maximale. (voir la figure 6.8). Il observe ainsi que la courbure de sections contenant la normale en  $p$  mais des directions tangentes différentes varie.

Nous allons voir qu'il suffit de connaître les courbures en  $p$  de deux sections particulières de la surface pour pouvoir calculer les courbures en  $p$  de toutes les autres sections.

Thus he proved the two following results :

(1) for any affine plane  $P$  containing  $m$  and not tangent at  $m$  to  $S$ , let  $P_0$  be the plane normal to  $S$  at  $m$  containing  $T_m S \cap P$  ; then the curvature of  $S \cap P$  at  $m$  is known as soon as we know the curvature of  $S \cap P_0$  and the angle  $\phi$  between  $P$  and  $P_0$ . These two curvatures and  $\phi$  are related by :

$$\kappa(S \cap P) \cos \phi = \kappa(S \cap P_0).$$

(2) when  $P_0$  turns around the normal  $N$  to  $S$  at  $m$ , the curvature of  $S \cap P_0$  is a quadratic function of the unit vector tangent to  $S$  at  $m$  in  $P_0$  ; this quadratic function depends only on  $S$  in the neighbourhood of  $p$ , and characterizes well the shape of  $S$  near this point.

Euler (bas de la page 4 de [Eu1]) calcule brutalement le rayon de courbure du cercle osculateur en  $m$  à une section quelconque de  $S$  par un plan passant par  $m$ .

Ici, nous allons d'abord démontrer le second point en considérant des courbes quelconques tracées sur la surface passant par le point  $m$ .

Nous utiliserons une équation locale de la surface de la forme  $z = f(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont des coordonnées orthonormées du plan tangent en  $m$  à la surface,  $(x, y, z)$  des coordonnées orthonormées de l'espace, telles que les coordonnées de  $m$  soient  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

**Théoreme 18** Soit  $S$  une surface orientée de  $\mathbb{R}^3$ ,  $m$  un point de  $S$  et  $C = \{c(s)\}$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^2$  tracée sur  $S$ , définie au voisinage de  $m$  telle que  $c(0) = m$  paramétrée par la longueur de l'arc. Soit  $\pi_N$  la projection orthogonale sur la normale à  $S$  au point  $m$  de  $\mathbb{R}^3$ ; on notera  $\nu(m)$  le vecteur unitaire normal à  $S$  en  $m$ . La composante normale  $\pi_N(\ddot{c}(0))$  de l'accélération de  $c$  à l'instant 0 est  $II_p(\dot{c}(0))\nu(m)$ , où  $II_p$  est une forme quadratique sur  $T_p(S)$  qui ne dépend que de  $S$  et  $m$ .

Cette forme quadratique  $II_p$  est appelée *seconde forme fondamentale* de  $S$  en  $p$ .

**Démonstration :** Dans cette carte l'arc  $c$  s'écrit :  $c(t) = \phi(x(s), y(s))$  où  $c(0) = (0, 0)$ , et  $\dot{c} = \dot{x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial\phi}{\partial y}$ , ou encore :

$$\dot{c}(s) = \dot{x}(s)\frac{\partial\phi}{\partial x}(x(s), y(s)) + \dot{y}(s)\frac{\partial\phi}{\partial y}(x(s), y(s)).$$

De la même façon, en dérivant une seconde fois :

$$\ddot{c} = \ddot{x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \ddot{y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \dot{x}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\dot{x}\dot{y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \dot{y}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}.$$

En projetant sur la normale à  $S$ , les termes qui comportent  $\ddot{x}$  et  $\ddot{y}$  sont éliminés, et :

$$\pi_N(\ddot{c}(0)) = \dot{x}^2(0)\pi_N\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(0, 0)\right) + 2\dot{x}(0)\dot{y}(0)\pi_N\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(0, 0)\right) + \dot{y}^2(0)\pi_N\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(0, 0)\right),$$

ce qui ne dépend que de  $m$ ,  $S$ , and  $(\dot{x}(0), \dot{y}(0))$  comme annoncé.  $\square$

Le fait que la seconde forme fondamentale ne dépende pas du choix de coordonnées dans  $T_m S$  vient de sa définition :  $II_m(v) = (\ddot{c}(0)|N)$  où la courbe  $C$  satisfait les conditions  $c(0) = m$ ;  $\dot{c}(0) = v$ .

**Remarque :** On pourrait aussi travailler avec une carte quelconque.

This expression of  $\pi_N(\ddot{c}(0))$  involves  $\dot{x}(0)$  and  $\dot{y}(0)$ , and for that reason,  $II_m$  could seem to depend on the choice of the chart. But it does not, for  $II_m$  is *defined* itself independently on the chart, by a projection. Then, the second fundamental form is really a bilinear mapping defined on the tangent plane, with no regard to any chart, even if we used a chart to prove that  $\pi_N(\ddot{c}(0))$  depend on  $c$  only at the first order, i.e. only by its first derivative  $\dot{c}(0)$ . This situation will arise very often in differential geometry, where we use a chart to obtain some properties of an object defined without charts.

Par ailleurs, si la courbe est contenu dans un plan  $H$  orthogonal à  $S$  en  $m$ , le vecteur  $\ddot{c}$  est contenu dans ce plan et normal au vecteur  $T = \dot{c}(0)$  c'est à dire porté par la normale en  $m$  à  $S$ . Nous venons montrer que la courbure de ces courbes dépend de manière quadratique du vecteur tangent à la courbe.

Dans le cas où  $H$  est normal à  $S$  en  $m$ , si l'on prend pour comme axes de coordonnées dans le plan tangent les directions orthogonales qui permettent de l'écrire sous forme d'une somme de carrés, on obtient l'expression de la courbure déjà observée pour l'exemple initial :  $k(T_\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$

où  $T_\theta = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$ . Les courbure  $k_1$  et  $k_2$  sont appelées *courbures principales* de la surface en  $m$ . Ce sont les maxima et minima de la courbure des sections orthogonales.

Si elle est contenue dans un plan  $H$  faisant un angle  $\alpha$  avec le plan normal contenant  $\dot{c}(0)$ , le vecteur courbure principale de cette courbe se projette toujours sur la même expression quadratique multipliée par  $\nu(m)$ . On a donc  $k = \frac{1}{\cos \alpha} II_m(\dot{c}(0))$ .

Another (equivalent) way of describing the second fundamental form without any chart is the following : if  $u \in T_p S$  is any tangent vector to  $S$  at  $p$ , let  $c$  be a  $\mathcal{C}^2$ -arc drawn on  $S$  with  $\dot{c}(0) = u$  ; then  $\pi_N(\ddot{c}(0))$  is collinear to  $\nu(p)$ , and the coefficient defines  $II_p(u)$  unambiguously, due to the preceding theorem. Many “purely intrinsic” constructions in modern differential geometry are smartly told consequences of such an unavoidable use of a curve, or a chart dissimulated in an “introductory differential calculus chapter”.

When  $c$  is parametrized by arc length, the number  $\kappa_n$  defined by  $\pi_N(\ddot{c}(0)) = \kappa_n \nu(p)$  is called the *normal curvature in the direction of the tangent  $T$*  containing  $\dot{c}(0)$ . It is sometimes called the *normal curvature of  $c$*  itself at  $p$ , but, by the preceding theorem, takes the same value for all the curves on  $S$  with the same tangent at  $p$ . This gives the important corollary :

**Corollaire 19** *Let  $\mathcal{C}$  is a  $\mathcal{C}^2$ -curve drawn on  $S$  passing through  $m$ , with tangent  $T$  at  $m$ . Then the following curves have the same curvature at  $p$  :*

*the orthogonal projection of  $c$  on the affine plane  $P_0$  perpendicular to  $c$  containing  $T$  ;*

*the intersection of  $P_0$  and  $S$  near  $p$ .*

*This is also the normal curvature at  $p$  of the following curves :*

*the curve  $\mathcal{C}$  itself ;*

*the intersection of  $S$  and the osculating plane of  $\mathcal{C}$  at  $p$  ;*

*the projection of  $\mathcal{C}$  on this osculating plane.*

**Démonstration :** All these curves have the same tangent at  $p$ . □

If  $\mathcal{C}$  is a curve on  $S$ , we call *normal projection of  $\mathcal{C}$*  at  $p$  the orthogonal projection of  $\mathcal{C}$  on the normal plane  $P_0$  tangent to her at  $p$ . Then the normal projection of  $\mathcal{C}$  at  $p$  is osculating to the normal section  $S \cap P_0$ . This is not so intuitive by just looking at the curve itself, at a large scale. For instance, taking for  $\mathcal{C}$  a little circle near the North pole on earth passing through the pole, the projection of  $\mathcal{C}$  on  $P_0$  is a small ellipse whose curvature radius at the pole is equal to the earth radius ! (see figure 6.2, where the sphere has been cut along the normal plane  $P_0$  – here the meridian – tangent to the circle  $\mathcal{C}$  and its normal projection onto  $P_0$ ).

We can get a feeling of this osculation of the normal projection of a curve with the normal plane section by parametrizing both, and looking at their Taylor expansion. To this aim, take orthogonal coordinates  $x, y, z$  of  $\mathbb{R}^3$  for which the tangent plane  $T_p S$  is  $xOy$  and  $P_0$  is  $xOz$ . Locally,  $S$  is the graph of a function  $f$  near  $(0, 0)$  such that  $f(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

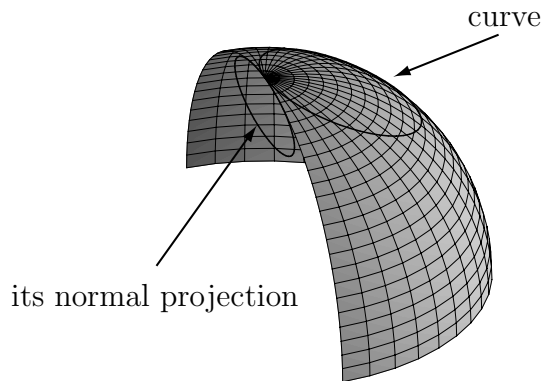


Figure 6.2:

The orthogonal cylindric surface  $S'$  directed by  $S \cap P_0$  is the graph of a function  $(x, y) \mapsto h(x, y)$  depending only on  $y$ . The curve  $\mathcal{C}$  can be parametrized by  $x \mapsto (x, \ell(x), f(x, \ell(x)))$ , where  $\ell$  is a function such that  $\ell(0) = \ell'(0) = 0$ . Considering  $g(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$ , we want to show why  $g(x, \ell(x)) = \mathcal{O}(x^3)$ . This results from the following little lemma which describes infinitesimally the situation :

**Lemme 20** *Let  $(x, y) \mapsto g(x, y)$  be a real function defined around  $(0, 0)$ , qui admet un developpement limité :*

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + \iota(\|(x, y)\|)^2$$

*such that, for any  $x$ ,  $g(x, 0) = 0$ . Let  $\ell$  a one variable real function such that  $\ell(x) = \mathcal{O}(x^2)$  at 0. Then :*

$$g(x, \ell(x)) = \iota(x^2).$$

**Démonstration :** The condition  $g(x, 0) = 0$  gives  $a = 0$ . Then :

$$g(x, \ell(x)) = bx\ell(x) + c\ell(x)^2 + \iota(x^2) = \iota(x^2).$$

□

This gives the infinitesimal measurement of the osculation of the normal projection of a curve drawn on  $S$  (i.e. the projection of the curve on the normal plane  $P_0$  at  $p$  containing her tangent at  $p$ ) and the normal section  $S \cap P_0$ .

**Remarque :** If we want to see the lemma 20 on the graph of  $g$  by evaluating the relative size of some segments, we are tempted to write  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (x, 0, 0)$ ,  $B = (x, \ell(x), 0)$ ,  $C = (x, \ell(x), g(x, \ell(x)))$ . Then,  $AB = \mathcal{O}(OA^2)$ , and if  $BC = \iota(AB)$  we are done, for then  $AB = \iota(OA^2)$ . But with our hypotheses this is not true. Take for instance  $g(x, y) = x^2\sqrt{|y|}$  and  $y = \ell(x) = x^6$ , so that  $g(x, \ell(x))/\ell(x) = 1/|x|$  which tends to  $\infty$  when  $x$  tends to 0 (see figure 6.3, where the arc AC of the surface should have a vertical tangent, contrarily to the picture made with a software). The two terms  $bxy + cy^2$  in the lemma are thus necessary to ensure that  $g(x, \ell(x)) = \iota(x^2)$ .

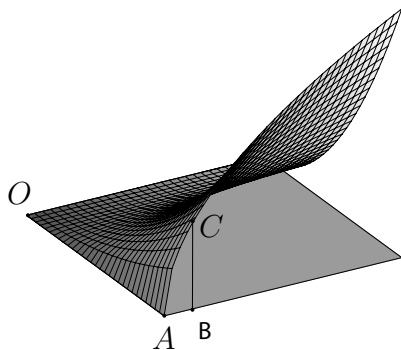


Figure 6.3:

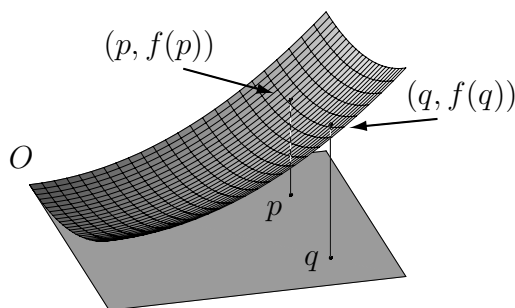


Figure 6.4:

Nevertheless, if the function  $g$  of the lemma is of class  $\mathcal{C}^2$  around  $O$ , then the lemma 20 and the theorem 18 admit a nice geometric interpretation formalised in the following proposition (see figure 6.4) :

**Proposition 21** *If a real function  $f$  defined around  $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  is of class  $\mathcal{C}^2$ , with  $df_O = 0$  then, for any two different points  $p$  and  $q$ ,  $|f(q) - f(p)| = \lambda(pq)$  when  $p$  and  $q$  tend to 0 independently (and staying different).*

**Démonstration :** This is an easy consequence of the second order Taylor formula taken at  $p$  :  $|f(q) - f(p) - df_p(q - p)| \leq M\|q - p\|^2$ , where  $M$  is the maximum of the operator norm of  $d^2f$  on the neighbourhood of  $O$ , and

$$|df_p(q - p)| = |df_p(q - p) - df_O(q - p)| \leq M\|p\| \|q - p\|,$$

and  $|f(q) - f(p)| = \lambda(\|q - p\|)$  when  $p$  and  $q$ , distincts, tend to  $O$ .  $\square$  For  $p = (x, 0)$  and  $q = (x, \ell(x))$  this gives the lemma 20 when  $g$  is  $\mathcal{C}^2$ .

Now, we shall relate the curvature of an arc  $c$  drawn on  $S$  with that of the normal projection of  $c$  (or the plane section of  $S$  tangent to her at  $p$ ). This is just an application of Pythagoras' theorem. To simplify, suppose  $c$  (drawn on  $S$ ) is parametrized by arc length,  $c(0) = p$ , and the curvature  $\kappa$  of  $c$  at  $p$  is not null. Let  $\vec{t} = \dot{c}(0)$ , which is a unit tangent vector at  $p$ ,  $\vec{\nu}$  the unit normal vector at  $p$ , and  $\vec{u} = \vec{\nu} \wedge \vec{t}$ . As  $\ddot{c}(0) \perp \dot{c}(0)$ , the acceleration  $\ddot{c}(0)$  can be (uniquely) written :  $\ddot{c}(0) = \kappa \vec{n}$ ,  $\kappa > 0$ , thus defining  $\vec{n}$  orthogonal to  $\vec{t}$ , and more precisely :

$$\vec{n} = \cos \phi \vec{\nu} + \sin \phi \vec{u}.$$

We notice that the orientation of  $S$  give a precise value to  $\phi$  modulo  $2\pi$  : this is an angle between two vectors and not only to lines.

**Théoreme 22** *The normal curvature  $\kappa_n$  and the curvature  $\kappa$  are related by :  $\kappa_n = \kappa \cos \phi$ .*

**Démonstration :** The decomposition of  $\ddot{c}(0)$  in the basis  $(\vec{t}, \vec{u}, \vec{v})$  of  $\mathbb{R}^3$  is :

$$\ddot{c}(0) = \kappa_n \vec{v} + \kappa_g \vec{u},$$

by the very definition of  $\kappa_n$ , the other coordinate  $\kappa_g$  being too defined by this relation (and studied latter). See figure 6.5.

Comparing to  $\ddot{c}(0) = \kappa \vec{n} = \kappa(\cos \phi \vec{v} + \sin \phi \vec{u})$  give the result.  $\square$

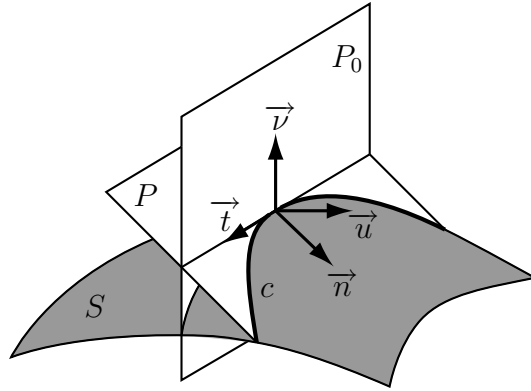


Figure 6.5:

A byproduct of this proof is the other relation  $\kappa_g = \kappa \sin \phi$  by which this number  $\kappa_g$  seems to depend highly on the normal vector. This point will be examined in the *Disquisitiones* of Gauss, and is not evoked in this Euler's Memoir.

To examine the second fundamental form  $II_p$ , we consider orthogonal coordinates for which  $S$  is locally the graph of a function  $\mathcal{C}^2 : (x, y) \rightarrow f(x, y)$  with  $p = (0, 0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$ ,  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , with the convention :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{and} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

We apply the theorem 18 to the chart :  $(x, y) \mapsto \phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  at the point  $p = (0, 0, 0)$ . Then the normal unit vector at  $p$  is  $(0, 0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \pi_N \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, 0) \right) &= (0, 0, f_{xx}(0, 0)), \\ \pi_N \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(0, 0) \right) &= (0, 0, f_{xy}(0, 0)), \\ \pi_N \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0, 0) \right) &= (0, 0, f_{yy}(0, 0)). \end{aligned}$$

The normal curvature of  $S$  in the direction of  $(\cos \theta, \sin \theta)$  is :

$$II(\cos \theta, \sin \theta) = r \cos^2 \theta + 2s \cos \theta \sin \theta + t \sin^2 \theta = \Phi(\theta),$$

with Monge's notations :

$$r = f_{xx}(0, 0), \quad s = f_{xy}(0, 0), \quad t = f_{yy}(0, 0).$$

This trigonometric polynomial  $\Phi$  is linearised in :

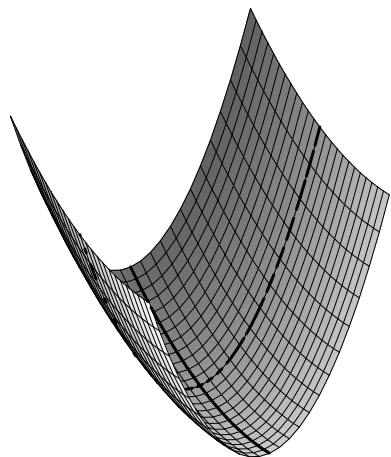
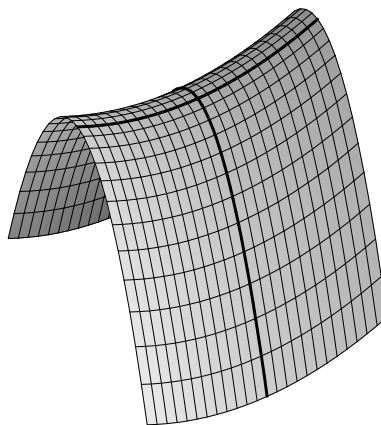
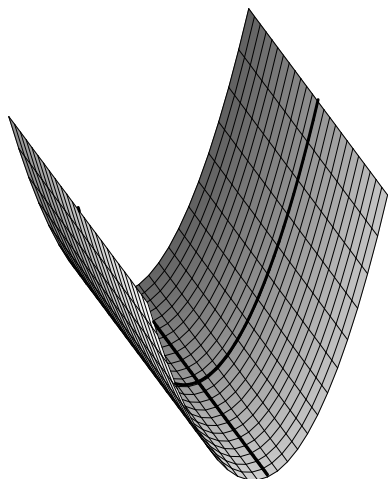
$$\Phi(\theta) = \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2} \cos 2\theta + s \sin 2\theta.$$

It attains its maximum  $k_1 = \frac{r+t}{2} + A$ , with  $A = \sqrt{\left(\frac{r-t}{2}\right)^2 + s^2}$ , at  $\theta = \theta_0$  and  $\theta = \theta_0 + \pi$ , where :  $\cos 2\theta_0 = \frac{r-t}{2A}$  and  $\sin 2\theta_0 = \frac{s}{A}$ . This is the direction of *maximal normal curvature*. The fonction  $\Phi$  attains its minimum  $k_2 = \frac{r+t}{2} - A$  at  $\theta = \theta_0 \pm \pi/2$ , and this direction of minimal normal curvature is orthogonal to the preceding one. These are the axes of the ellipse defined by  $rX^2 + 2sXY + tY^2 = 1$ .

In Euler's memoir, the second fundamental form is calculated for  $S$  as the graph of a function with any partial derivatives at  $(0, 0)$ , which gives a complicated formula for us, but not for him. In the same way as the modern algebra is an incitation to appreciate the synthetic formula for  $II_p$  written in the proof of the theorem 18, Euler gives that "complicate" formula, for those for whom it could be useful, knowing perfectly that a convenient choice of coordinates make it much simpler.

Euler's main objective seemed to describe the number of independent parameters on which depends the curvature at  $p$  of any curve  $c$  drawn on  $S$ . If the curvature (at  $p$ ) of *three* normal plane sections is known, together with the three tangents to these sections, the three coefficients  $r, s, t$  are deduced from three linear equations, then giving the quadratic form  $II_p$ . Now, the direction of the line tangent to  $c$  at  $p$  and the angle between the osculating plane and the normal plane with the same line in common on  $T_p S$  are sufficient to determine the curvature of  $c$  at  $p$ , due to the two preceding theorems. For Euler, at least along the lines of that Memory, the local shape of  $S$  is thus characterised by the two principal curvatures and the direction of the greatest one : that is the geometrical vision of the *dependance of the curvature at  $p$  on three parameters*. The position in space of the principal directions of curvature can be freely modified (staying orthogonal) by displacing the surface, and have not really a geometrical meaning. Only the two curvatures  $k_1$  and  $k_2$  give important information on the shape of  $S$ . The three configurations are shown in the figures 6.6, 6.7 and 6.8, and, for Euler, the local shape of  $S$  really depends on *two* parameters :  $k_1$  and  $k_2$ .

In fact, Gauss will show that these informations characterise more *the relation of  $S$  with the ambient space  $\mathbb{R}^3$*  than the shape of  $S$  in itself, understood as the properties of the distance inside  $S$  near  $p$ , measured only by length of arcs drawn on  $S$ . Before entering the details of the Gauss revolution, let us observe that the two principal curvature are naturally ordered, for they are real numbers, and the knowledge of the (not ordered) pair  $\{k_1, k_2\}$  is sufficient to determine them. An algebraist would then immediately consider their sum  $k_1 + k_2 = r + t$  and their product  $k_1 k_2 = rt - s^2$  as the fundamental objects, recognizing  $k_1$  and  $k_2$  as the roots of the second degree polynomial  $X^2 - (r + t)X + rt - s^2$ . But in the absence of any geometric reason for

Figure 6.6:  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 0,5$ Figure 6.7:  $k_1 = 0,5$ ,  $k_2 = -4$ Figure 6.8:  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 0$ 

this algebraic remark, it has not its place in the local description of the surface which is the main goal of Euler.



# Chapter 7

## Contact d'une sphère et d'une surface; application de Gauss

### 7.1 Équation locale d'une surface et sphères osculatrices

Étudions maintenant la géométrie locale d'une surface au voisinage d'un point  $m$  en comparant la surface à toutes les sphères tangentes en  $m$  à la surface. Ce point de vue, apparemment, ne donne qu'une partie des résultats obtenus par Euler (il manque ce qui concerne les sections de la surface par des plans passant par  $m$  ne contenant pas la normale en  $m$ ).

Localement, au voisinage d'un point  $m_0$ , la surface admet l'équation :

$$z = a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + cy^2 + \text{termes d'ordre plus grand en } x \text{ et en } y$$

où les coordonnées sont les projections orthogonales sur les vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  d'une base orthonormée dont les deux premiers vecteurs sont dans le plan tangent  $T_{m_0}M$ , et le troisième normal à la surface en  $m_0$ . Nous appellerons  $x, y$  coordonnées horizontales et  $z$  coordonnée verticale.

En utilisant comme deux premiers vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  des vecteurs propres unitaires de la forme quadratique  $a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + cy^2$ , l'équation précédente se réduit à :

$$z = \frac{1}{2}[k_1 \cdot x^2 + k_2 \cdot y^2] + \text{termes de plus haut degré.} \quad (7.1)$$

Justifions maintenant la notation  $k_i$  qui est celle utilisée pour les courbures principales.

Remarquons d'abord que l'équation de la sphère  $S_R$  de rayon  $R$  tangente en l'origine au plan horizontal est  $(z - R)^2 + y^2 + x^2 = R^2$ . En observant que, pour  $x$  et  $y$  petits,  $z$  est de l'ordre de  $x^2 + y^2$ , nous obtenons :

$$z = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}x^2 + \frac{1}{R}y^2\right] + \text{termes d'ordre plus élevé} \quad (7.2)$$

Therefore the vertical difference between the coordinate  $z$  of a point of the surface given by the equation (7.1) above and the coordinate  $z_R$  of a point, near the origin, of the sphere  $S_R$  of equation  $(z - R)^2 + y^2 + x^2 = R^2$ , above the same point  $(x, y)$  in the coordinate plane is:

$$z - z_R = \frac{1}{2}[(k_1 - \frac{1}{R}) \cdot x^2 + (k_2 - \frac{1}{R}) \cdot y^2] + \text{higher order terms}.$$

The quadratic part of this difference is degenerated when the radius  $R$  takes the values  $R = R_1 = \frac{1}{k_1}$  or  $R = R_2 = \frac{1}{k_2}$ . The two corresponding spheres  $S_1$  and  $S_2$  are called the osculating spheres at the origin of the surface  $M$  of equation (7.1).

We can also recognize geometrically the osculating spheres among the pencil of spheres tangent at the origine to the horizontal plane. The equations of the intersection of the sphere  $S_R$  with  $M$  are:

$$\frac{1}{2}[(k_1 - \frac{1}{R}) \cdot x^2 + (k_2 - \frac{1}{R}) \cdot y^2] + \text{higher order terms} = z - z_R = 0.$$

and

$$z = \frac{1}{2}[\frac{1}{R}x^2 + \frac{1}{R}y^2] + \text{higher order terms}$$

When the curvature  $k = \frac{1}{R}$  of the sphere  $S_R$  is between  $k_1$  and  $k_2$ , the intersection is, near the origin, the union of two arcs intersecting transversally in the origin. The equation of the tangents in the origin to these arcs is given by the quadratic part of the first equation of the intersection:

$$\frac{1}{2}[(k_1 - \frac{1}{R}) \cdot x^2 + (k_2 - \frac{1}{R}) \cdot y^2] = 0$$

When  $k \notin [k_1, k_2]$  the intersection of  $S_R$  and  $M$  near the origin reduces to a point, the origin.

The two remaining spheres (when  $k_1 \neq k_2$ ) are the osculating spheres. When  $k = k_1, k_1 \neq k_2$ , generically, that is when the higher order term of the equation:

$$\frac{1}{2}[(k_1 - \frac{1}{R}) \cdot x^2 + (k_2 - \frac{1}{R}) \cdot y^2] + \text{higher order terms} = z - z_R = 0.$$

contains an  $x^3$  term, the intersection has locally a cuspidal edge tangent to the  $x$ -axis as the principal terms left in the previous equation are:

$$(k_2 - \frac{1}{R}) \cdot y^2 + ax^3; a \neq 0$$

any singularity can be seen add to the equation of the sphere what you want of order 3 and more)

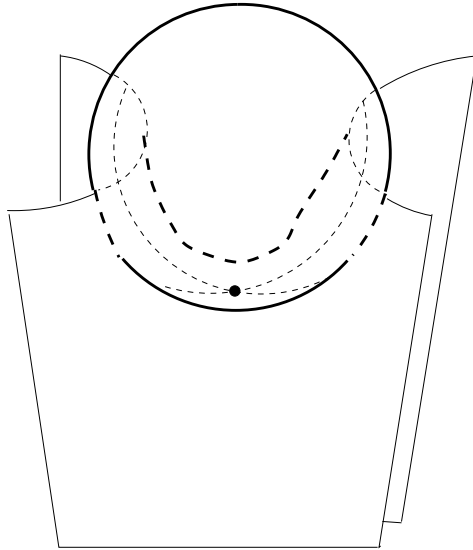


Figure 7.1: Contact de type selle entre une sphère et la surface

## comment osculating, compare with the osculating quadric

Implicitly, choosing the positive orientation of the  $z$ -axis, we define a local orientation of the surface, the one such that the frame of  $\mathbb{R}^3$  obtained by adding the  $z$ -axis to a positive frame of the tangent plane to the surface gives the orientation of the ambient space  $\mathbb{R}^3$ .

The sphere of radius  $R$  has in every point  $k_1 = k_2$ . A point on a surface satisfying the equality  $k_1 = k_2$  is called an *umbilic*.

## 7.2 L'application de Gauss

Let us now change our viewpoint, and consider locally a unit normal vector  $N(m)$  defined continuously around a point  $m_0$  of a surface.

This defines a map  $\gamma$ , called the Gauss map, from the surface to the unit sphere  $S^2$ .

### Définition 23 Courbure de Gauss

- The Gauss curvature at a point  $m \in M$  is the jacobian  $K(m) = \det(d\gamma)(m)$  of the Gauss map.

**Proposition 24** - The Gaussian curvature of  $M$  at  $m$  is the product of the two principal curvatures  $K(m) = k_1(m) \cdot k_2(m)$ .

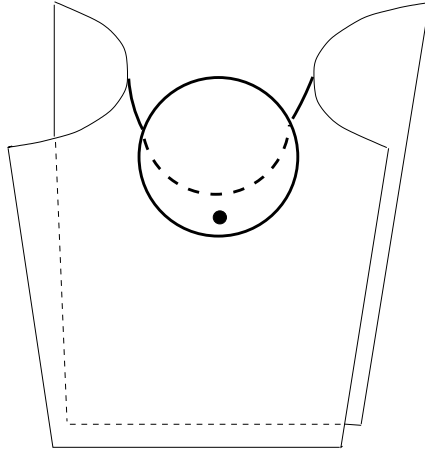


Figure 7.2: Contact de type centre entre une sphère et la surface

- Choosing a local equation of the surface  $M$  using the tangent plane  $T_m$  and the normal vector at  $m$ :

$$z = \frac{1}{2}[k_1 \cdot x^2 + k_2 \cdot y^2] + \text{higher order terms. } (*)$$

The eigen-directions of the differential  $d\gamma(m)$  are the eigen-direction of the quadratic part of  $z = f(x, y)$ .

This Gaussian curvature has another important property: it is intrinsic, that  $K(m)$  depends on less information than the germ of the embedding at a the point  $m$ . It depends only on the metric near  $m$  as a infinitesimal animal (an ant is a good approximation) may feel it.

We will be a little more precise in the polyedral case.

**Démonstration :** The gradient of the function  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$  is well defined and a positive multiple of the oriented unit normal to the surface (at least in the neighbourhood of  $x$ ). We have, then:

$$N(x) = \frac{\text{grad}(F)}{|\text{grad}(F)|} = [1/(1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2)^{1/2}] \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

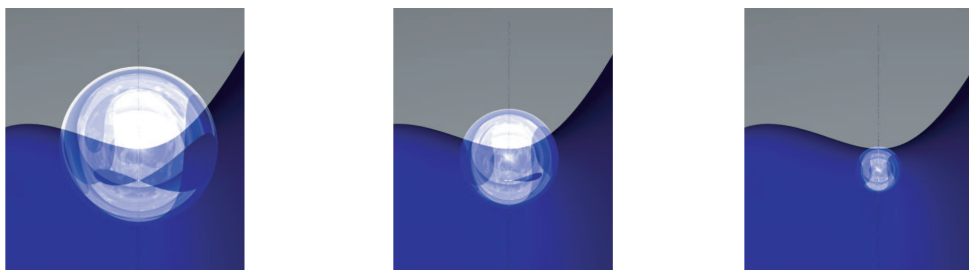
the matrix of  $d\gamma(m)$  is then:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

The latter matrix is called the *hessian* of  $f$ . Using the coordinates  $(x, y)$  defined using the eigen-directions of the quadratic part of  $f$ , we get:

$$d\gamma(m) = \begin{pmatrix} k_1(m) & 0 \\ 0 & k_2(m) \end{pmatrix}$$

This proves the two parts of the proposition. □



Contact de type selle    Contact avec une sphère osculatrice    Contact de type centre

Figure 7.3: Contacts possibles entre une sphère et une surface

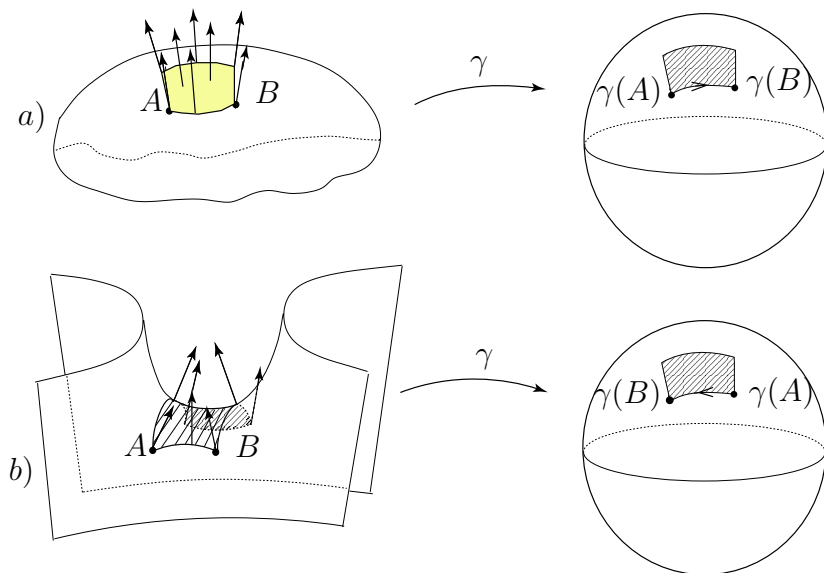


Figure 7.4: L'application de Gauss



# Chapter 8

## Projections

Dans ce chapitre le mot “projection” désigne une projection orthogonale, soit sur un plan, soit sur une droite.

### 8.1 Projection d’une surface sur une droite

Les points critiques de la projection d’une surface sur une droite  $\ell$  sont les points où le plan tangent à la surface est normal à la droite  $\ell$ ; Si la surface est donnée par une paramétrisation  $m = \Phi(u, v)$  et si  $e_0$  est un vecteur de  $\ell$ . En d’autres termes, ce sont les points  $m \in S$  pour lesquels le vecteur normal à la surface est contenu dans la droite  $\ell$ . On a  $(\partial\Phi/\partial u|_{e_0}) = (\partial\Phi/\partial v|_{e_0}) = 0$ .

Lorsque la surface est donnée par une équation  $z = f(x, y)$ , la projection sur l’axe des  $z$  est donnée par  $f(x, y)$ . Un point  $m \in S$ , est *non critique* pour la projection sur l’axe des  $z$  dès que l’un des vecteurs  $\partial f/\partial x$  ou  $\partial f/\partial y$  est non nul.

Lorsque la surface est donnée par une équation  $z = f(x, y)$ ,  $x, y$  des coordonnées orthonormées dans le plan tangent à  $S$  en  $m = O$ , et  $z$  une coordonnée unitaire sur la normale à  $S$  en  $m$ , la projection admet donc un point critique en  $m$ . Ce point critique est *non-dégénéré* quand la matrice  $\mathcal{Hess}(f)(m) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/(\partial x)^2(m) & \partial^2 f/(\partial x \partial y)(m) \\ \partial^2 f/(\partial x \partial y)(m) & \partial^2 f/(\partial y)^2(m) \end{pmatrix}$  est non dégénérée.

Nous avons vu que cette condition est exactement  $K(m) \neq 0$  puisque la courbure de Gauss de la surface en  $m$  vaut en ce point  $K(m) = \det \begin{pmatrix} \partial^2 f/(\partial x)^2(m) & \partial^2 f/(\partial x \partial y)(m) \\ \partial^2 f/(\partial x \partial y)(m) & \partial^2 f/(\partial y)^2(m) \end{pmatrix}$ .

L’application de Gauss peut elle aussi avoir des points critiques  $m_c \in S$  et donc des valeurs critiques  $\gamma(m_c) \in \mathbf{S}_1^2$ . Si ni  $z \in \mathbf{S}_1^2$  ni  $-z \in \mathbf{S}_1^2$  ne sont des valeurs critiques de l’application de Gauss, la projection sur la droite  $\ell$  qui contient les points  $z$  et  $-z$  n’as pas de point critique dégénéré (sinon ce devrait être un point critique de l’application de Gauss).

Le théorème de Sard (voir 12) affirme que la mesure de l’ensemble des valeur critiques d’une application de classe suffisante (a fortiori  $C^\infty$ ) est nulle. Il permet donc, puisque  $Crit(\gamma) \cup -Crit(\gamma)$  est aussi de mesure nulle, de conclure que, pour presque

toute direction  $\ell$  la projection sur  $\ell$  de la surface  $S$  n'admet que des points critiques non dégénérés.

## 8.2 Projection d'une surface sur un plan

Les points critiques de la projection d'une surface sur un plan  $h$  sont les points où le plan tangent à la surface est normal au plan  $h$ ; en d'autres termes, ce sont les points  $m \in S$  pour lesquels le vecteur normal à la surface est contenu dans le plan  $h$ .

# Chapter 9

## Surfaces polyédriques de $\mathbb{R}^3$

Using integral geometry, the proofs for a polyhedral Gauss-Bonnet theorem and a polyhedral *theorem egregium* are easier than the proof of the smooth equivalent, so we will start this chapter by giving Banchoff's proof of both for polyhedral surfaces [Ban1].

First, let us define a polyhedral surface of  $\mathbb{R}^3$ . The basic pieces are closed plane triangles. Any triangle has three edges and three vertices in its boundary. Triangles, edges and vertices are called *simplices*. A polyhedral surface is a union of triangles  $\sigma_i$  satisfying the following properties:

- The interiors of the  $\sigma_i$  are disjoint;
- The union of the  $\sigma_i$  is connected, and homeomorphic to a closed surface;
- The intersection of two triangles is a simplex.

As the triangles are the usual Euclidean triangles, given a vertex  $v \in \sigma$  we define the segment  $e(v, \sigma)$  as the image of the edge of  $\sigma$  opposite to  $v$  by the homothety of center  $v$  and ratio  $1/2$ .

COMMENT - I replaced "homotethy" with "homothety". Check that this is what you meant.

The *link* of  $v$  is the union

$$\mathcal{L}(v) = \bigcup e(v, \sigma); v \in \sigma.$$

If  $q$  edges contain the vertex  $v$ , the planes containing an edge that contains  $v$  form  $q$  projective lines in  $G(3,2)$  (see Section ?? in the Appendix). Let us denote by  $\mathcal{C}$ , (for critical) or  $\mathcal{C}(v)$  the union of the projective lines defined previously. Any plane through  $v$  not belonging to  $\mathcal{C}$  cuts  $\mathcal{L}(v)$  in a finite number of points. If all the triangles containing the vertex  $v$  are in the same plane, for a plane  $P \in G(3,2) \setminus \mathcal{C}$  one has

$$\#(\mathcal{L}(v) \cap P) = 2.$$

The number  $\#(\mathcal{L}(v) \cap P)$  is always even. It is natural to measure how "nontrivial" the plane  $P$  is with respect to  $v$  by

$$\phi(v, P) = (1/2) \cdot [2 - \#(\mathcal{L}(v) \cap P)].$$

### 9.0.1 Theorema egregium polyédrique

We can now define the *extrinsic curvature* of  $v$  as the integral:

$$k(v) = \int_{G(3,2)} \phi(v, P) dP$$

*Intrinsically*, that is inside the polyhedral surface  $M = \cup \sigma_i$ , at each vertex we can compute the intrinsic curvature  $k(v)$  as the difference of  $2\pi$  with the sum of the angles in  $v$  of the triangles that contain  $v$ :

$$k(v) = 2\pi - \sum_i \alpha(i, v); v \in f_i.$$

The ambiguity between the two definitions we gave of  $k(v)$  disappears with the following theorem:

**Théoreme 25 Theorema egregium (“remarkable theorem” in Latin)** *The intrinsic and the extrinsic methods for computing  $k(v)$  both give the same result.*

**Démonstration :** Let us compute the measure of the planes that intersect one side  $e$  of  $\mathcal{L}(v)$ . In  $G(3,2)$ , the length of the arc formed by the planes through  $v$ , intersecting  $e$ , and orthogonal to the plane containing  $v$  and  $e$  is the angle  $\alpha_e$  of the triangle containing  $v$  and  $e$  at  $v$ .

The measure of the planes through  $v$  that intersect  $e$  is then  $2\alpha_e$ . In Figure 9.1 below, we depict the corresponding set of oriented planes using their orthogonal unit vector visualized as a point in  $S^2$ .

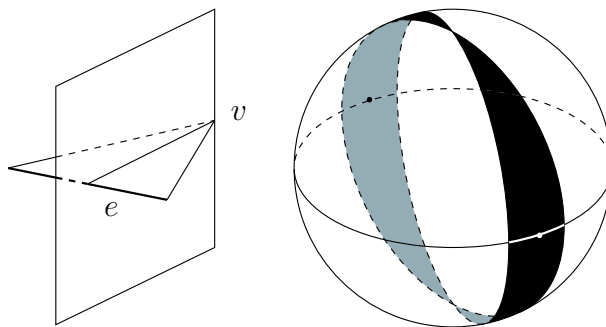


Figure 9.1: Plans orientés coupant  $e$  vu comme vecteurs unitaires de  $S^2$

Summing over all the edges of  $\mathcal{L}(v)$  we get

$$\int_{G(3,2)} \#(\mathcal{L}(v) \cap P) = 2 \cdot \sum_{e \in \mathcal{L}(v)} \alpha_e$$

or

$$\int_{G(3,2)} \phi(v, P) = 2\pi - \sum \alpha_e,$$

which is the relation we sought between the extrinsic integral  $\int_{G(3,2)} \phi(v, P)$  and the intrinsic defect or excess of angle (compared to a point of the Euclidean flat plane):  $2\pi - \sum_{e \in \mathcal{L}(v)} \alpha_e$ .  $\square$

### 9.0.2 Théorème de Gauss-Bonnet polyédrique

Let us denote the set of vertex of  $M$  by  $\mathcal{V}$ , the set of faces of  $M$  by  $\mathcal{F}$ , and the set of edges of  $M$  by  $\mathcal{E}$ .

We can now prove the polyhedral version of the Gauss-Bonnet theorem:

#### Théorème 26 (Polyhedral Gauss-Bonnet theorem)

Let  $M$  be a polyhedral surface embedded (or immersed) in  $\mathbb{R}^3$ . Then its total curvature satisfies the equation

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} k(v) = 2\pi \cdot \chi(M).$$

**Démonstration :** Every triangle (face of  $M$ ) has three edges, and, as  $M$  is a surface, every edge belongs to two faces. Let us consider the set  $\mathcal{D}$  of all pairs  $e \in f$  of an edge  $e$  contained in a face  $f$ .

There is a natural map between  $\mathcal{D}$  and the set  $\mathcal{F}$  of all faces, and a map between  $\mathcal{D}$  and the set  $\mathcal{E}$  of all edges.

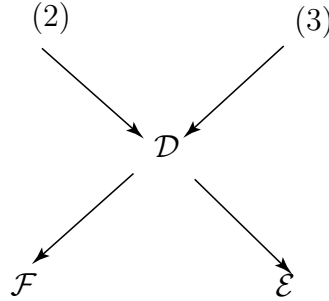


Figure 9.2: Diagramme

By the first map, a face has three inverse images: the pairs formed by one edge of the face and the face itself. By the second map, an edge has two inverse images: the pairs formed by the edge and one of the two faces which contain it.

Therefore,

$$\#\mathcal{D} = 3 \cdot \#\mathcal{F} = 2 \cdot \#\mathcal{E}.$$

The sum  $\sum_{\mathcal{V}} k(v)$  is  $2\pi\#\mathcal{V}$  minus the sum of all the angles of the faces of  $M$ . It is then equal to  $2\#\mathcal{V} - \pi \cdot (\#\mathcal{F})$ . Adding  $0 = \pi[3 \cdot \#\mathcal{F} - 2 \cdot \#\mathcal{E}]$ , we get

$$2\pi \cdot (\#\mathcal{F}) - 2\pi \cdot (\#\mathcal{E}) + 2\pi\#\mathcal{V} = \sum_{\mathcal{V}} k(v).$$

The first term is  $2\pi \cdot \chi(M)$ .  $\square$

### 9.0.3 Projections sur les droites de surfaces polyédriques

There is one important difference between smooth and polyhedral surfaces of  $\mathbb{R}^3$ : the notion of Morse function does not make sense for polyhedral surfaces. A consequence of this fact will be discussed in Section ??.

To understand how saddle-type behavior and maximum-type behavior can be mixed, we need to construct a vertex  $v$  such that the incident triangles look like an umbrella. In the example described in Figure 9.3, the number of intersection points  $\#(\mathcal{L} \cap P)$  can be either zero or greater than two on an open set of the set  $G(3, 2)$  of planes through  $v$ .

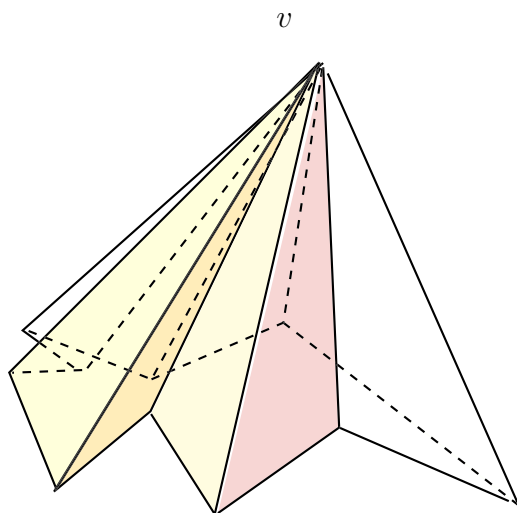


Figure 9.3: Parapluie polyédrique

Notice that the curvature  $k(v)$  can be very negative, but in some sense, from the extrinsic viewpoint, mixing positive and negative curvature.

We have

$$|k(v)| = \left| \int_{G(3,2)} \phi(v, P) \right| < \int_{G(3,2)} |\phi(v, P)|.$$

Nevertheless one can try, in view of the exchange theorem (Theorem ??), to build a polyhedral Morse theory. Let us restrict ourselves to the projection of a polyhedral surface on a line. When going through the projection of a vertex, the topology may change. This change may involve more than adding a simple handle as in differential Morse theory. The interested reader can find developments about a “polyhedral Morse theory” in [?].

### 9.0.4 Aire et approximation polyédrique

à faire

# Chapter 10

## Variétés abstraites: définitions et quelques exemples

### 10.1 Métriques riemanniennes en dimension $n$

Dans un espace métrique  $E$ , on se donne une fonction sur  $E \times E$ : la distance entre deux points.

Lorsque cet espace métrique est un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , la distance entre deux points  $m$  et  $m'$  est aussi la longueur du plus court chemin joignant  $m$  à  $m'$ . Soit maintenant  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ . On peut construire à partir de la distance euclidienne  $d_{\mathcal{E}}$  de  $\mathbb{R}^N$  deux fonctions distance sur  $M$ :  $d_R(m, m') = d_{\mathcal{E}}(m, m')$ , et  $d_I(m, m')$  la borne inférieure de la longueur des chemins tracés sur  $M$  joignant  $m$  à  $m'$ . Pour savoir calculer la longueur de tous les chemins différentiables tracés sur  $M$ , il suffit de savoir calculer la norme de tous les vecteurs tangents à ce chemin, ce qui est possible, puisque chaque espace tangent  $T_z M$  est muni d'une forme quadratique: la restriction de la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^N$ . Nous pouvons maintenant "oublier" que  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$ , et tout de même étudier ses propriétés pour la métrique  $d_I$ .

Remarquons que ces deux définitions ne coïncident pas, mais que l'on a :

$$\lim_{m \rightarrow m'} \frac{d_I(m, m')}{d_{\mathcal{E}}(m, m')} = 1$$

Il est maintenant naturel, lorsque  $M$  est une variété abstraite, de définir les formes quadratiques  $g_z$  sur chaque espace tangent  $T_z M$ . On supposera ici de plus que la forme quadratique  $g_z$  dépend continument de  $z \in M$ . On note indifféremment  $g$  la forme quadratique ou la forme bilinéaire associée.

Pour comparer globalement ou localement deux variétés riemanniennes, définissons.

Figure 10.1: The distances  $d_I$  and  $d_{\mathcal{E}}$  on the sphere  $S^2$

**Définition 27** Une isométrie entre deux variétés riemanniennes  $M_1, g_1$  et  $M_2, g_2$  est un difféomorphisme  $\Phi$ , tel que  $d\Phi$  est une isométrie euclidienne entre chaque espace tangent  $T_m M$  et  $T_{\Phi(m)} M_2$ , soit tel que :

$$\forall (m, v) \in TM_1, g_2(d\Phi(m)(v)) = g_1(v).$$

Il suffit de remplacer difféomorphisme par difféomorphisme local pour définir une isométrie locale.

## cartes locales ici ou plus tard?

Quand on a une paramétrisation locale de la surface  $M$  on note:

$$\begin{aligned} - E &= g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) \\ - F &= g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \\ - G &= g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

Se donner  $E, F, G$  permet de calculer avec une métrique riemannienne donnée dans une carte.

### Exemples

- Le tore plat  $\mathbf{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , où l'espace tangent en  $z \in \mathbf{T}^2$  est muni de la métrique euclidienne de  $T_{zeta} \mathbb{R}^2$  où  $\zeta \in \mathbb{R}^2$  est l'un des point qui se projette sur  $z$ .

Le tore plat est localement isométrique à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$ . C'est d'ailleurs ce que veut dire "plat".

- L'espace projectif  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = S^2/(z \sim (-z))$  (même construction que pour le tore plat.

### - Exercices.

- Montrer que les paramétrages suivants donnent une isométrie locale entre l'hélicoïde et la caténoïde.

La caténoïde est la surface de révolution, par rapport à l'axe des  $x$ , engendrée par une chaînette (d'équation  $y = a \cdot \cosh x$ , on peut donc la paramétrer par :

$$\begin{aligned} - x &= a \cosh v \cos u \\ - y &= a \cosh v \sin u \\ - z &= av \end{aligned}$$

Un hélicoïde est la surface engendré par une droite perpendiculaire à un axe qui tourne à vitesse constante et dont le point d'intersection avec l'axe se déplace aussi sur cet axe à vitesse constante (que l'on peut supposer égale à 1); le pas est la distance parcourue sur l'axe lorsque la droite fait un tour. Un hélicoïde de pas  $a$  peut être paramétré par :

$$\begin{aligned} - x &= a \sinh v \cos u \\ - y &= a \sinh v \sin u \\ - z &= au \end{aligned}$$

Pour démontrer qu'il existe une isométrie locale entre ces deux surfaces, il suffit de calculer les coefficients  $E, F$ , et  $G$  :

1) Caténoïde

$$\begin{aligned} E &= a^2 \cosh^2 v \sin^2 u + a^2 \cosh^2 v \cos^2 u = a^2 \cosh^2 v \\ F &= 0 \end{aligned}$$

$$G = a^2(1 + \sinh^2 v) = a^2 \cosh^2 v$$

2) Hélicoïde

$$E = a^2 \cosh^2 v \sin^2 u + a^2 \cosh^2 v \cos^2 u = a^2 \cosh^2 v$$

$$F = 0$$

$$G = a^2 \cosh^2 v$$

On peut même trouver une famille à un paramètre de surfaces minimales (à suivre) toutes localement isométriques, entre la caténoïde et l'hélicoïde.

### Surface développable

Montrer que la surface formée par les tangentes à une courbe de  $\mathbb{R}^3$  est localement isométrique au plan euclidien.

Soit  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe différentiable (notée  $C$ ) paramétrée par la longueur de l'arc d'origine  $c(a) : s$ . La surface balayée par les tangentes est paramétrée par :

$$(s, t) \mapsto c(s) + t \cdot \dot{c}(s)$$

La métrique induite sur la surface (de la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  est donnée, dans la carte  $(s, t)$ , par :

$$- E = |\dot{c}(s) + t \cdot \ddot{c}(s)|^2$$

$$- F = \langle \dot{c}(s) + t \cdot \ddot{c}(s) | \dot{c}(s) \rangle$$

$$- G = |\dot{c}(s)|^2$$

Considérons maintenant la courbe plane  $\Gamma$  paramétrée par la longueur de l'arc d'origine  $\gamma(a) : \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dont la courbure en fonction de la longueur de l'arc est la même fonction que la courbure de  $C$  en fonction de la longueur de l'arc sur  $C$ . Nous savons que si la courbure  $k(s)$  est nulle part nulle, cette condition détermine la courbe plane.

Les tangentes à  $\Gamma$  balayent une région du plan (bordée par l'arc  $\Gamma$  lorsque la courbure est partout non nulle sur cet arc). Cette région admet donc un paramétrage pour le quel il suffit de remplacer  $c$  par  $\gamma$  dans le paramétrage précédent. Par construction (coïncidence des valeurs de la courbure en fonction de  $s$ ), le domaine plan et la surface sont localement isométriques, au moins hors des points singuliers du paramétrage : la courbe  $C$  dans l'espace et la courbe  $\Gamma$  dans le plan.

#### 10.1.1 géodésiques

La signification géographique du mot géodésique est: un chemin joignant deux points sur la terre dont la longueur est minimale. Nous pourrions chercher sur une surface riemannienne  $S$  des chemins  $\gamma : \{m(t) \in S, t \in [0, T]\}$  joignant deux points et critiques pour la fonctionnelle de longueur. Le fait que le résultat soit, s'il en existe, toute une classe de chemins ayant des paramétrisations différentes nous fait préférer la fonctionnelle que nous appellerons *énergie*:  $E(\gamma) = \int_0^T |\dot{m}(t)|^2 dt$ .

**Définition 28** Une géodésique tracée sur une surface riemannienne  $S$  est une courbe extrémale pour la fonctionnelle d'énergie  $E$ .

Nous allons chercher d'abord une condition extrinsèque que doit satisfaire une géodésique tracée sur une surface  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Le principe de d'Alembert (voir la section (12.2) de l'appendice) montre que l'équation des géodésiques devient, en utilisant les champs de vecteurs  $\xi$  le long de  $\gamma$  tangent à  $S$ ,

$$(\ddot{m}(t) \mid \xi(t)) \equiv 0, \forall \xi$$

ce qui veut dire que l'accélération est en tout point orthogonale à la surface. Remarquons que si la vitesse  $|\dot{m}(t)|$  n'est pas constante, l'accélération  $\ddot{m}(t)$  a une composante sur la direction tangente à  $\gamma$  en  $m(t)$ . La condition d'extrémalité implique donc que le chemin doit être parcouru à vitesse constante. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que cette vitesse est 1. En effet, si  $\gamma = \{m(t), t \in [0, T]\}$  est extrémale, la courbe  $\gamma_a = \{m(at), t \in [0, aT]\}$  est aussi extrémale (la trajectoire et donc la longueur sont les mêmes, seule change la vitesse de parcours).

Nous vérifions maintenant que les grands cercles d'une sphère sont des géodésiques.

Par commodité, nous avons jusqu'à présent écrit  $|\dot{m}(t)|$  la vitesse en  $m(t)$  de (du mouvement sur) la courbe  $\gamma$ . Nous aurions pu, au lieu de  $|\dot{m}(t)|^2$ , écrire  $g(\dot{m}(t))$  où  $g$  est la métrique riemannienne induite sur la surface  $S$ .

Plus généralement, étant donnée une métrique riemannienne sur une surface, pas nécessairement induite par l'inclusion  $S \subset \mathbb{R}^3$ , nous pouvons encore considérer l'énergie d'un chemin  $\gamma = \{m(t), t \in [0, T]\}$ :

$$E(\gamma) = \int_0^T g(\dot{m}) dt.$$

Le calcul de cette intégrale doit maintenant être fait par morceaux, sur des tronçons du chemin chacun entièrement contenus dans une carte. Le résultat ne dépend pas de la manière dont est fait le découpage, pas plus que du choix de la carte permettant de faire le calcul lorsqu'un tronçon est recouvert par deux cartes différentes. En effet, dire qu'une métrique riemannienne est définie sur le fibré tangent  $TS$  signifie que l'écriture de la forme quadratique  $g(m)$  dans deux cartes différentes, disons  $g^i$  dans la carte  $U_i$  et  $g^j$  dans la carte  $U_j$ , reliées par le changement de carte  $\phi_{ij}$  satisfait  $g^j(\dot{m}_j(t)) = g^j(d\phi_{ij}(m_i(t))(\dot{m}_i(t))) = g^i(\dot{m}_i(t))$ , où les notations (une peu lourde certes)  $m_i(t)$  et  $m_j(t)$  désignent les points dans les cartes  $U_i$  et  $U_j$  correspondant au point  $m(t) \in S$  (le choix fait d'indiquer avec  $i$  ou  $j$  en exposant l'expression de la métrique dans une carte est fait pour (j'espère) éviter des confusions lorsque que des dérivées par rapport à des coordonnées sont indiquées en indice; nous essayerons d'éviter de mélanger les deux notations).

### 10.1.2 Le “theorema egregium” de Gauss

### 10.1.3 Le théorème de Gauss-Bonnet

## Chapter 11

Variétés de dimension plus grande  
que 2, encore des exemples!



# Chapter 12

## Appendice

### 12.1 Le théorème de Sard

Une bonne référence pour la démonstration de ce théorème est le livre de Milnor [Mil1].

### 12.2 Équation d'Euler-Lagrange et principe de d'Alembert

Une bonne référence pour cette partie est le livre de V. Arnold [1].

**notations** *Suivant Arnold, nous noterons dans cette section le gradient d'une fonction  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; m \in \mathbb{R}^3$ :  $\text{grad}U(m) = \frac{\partial U}{\partial m}(m)$ .*

Nous allons maintenant être obligés de travailler en dimension infinie (c'est à dire ici dans un espace de Banach). En effet l'espace des chemins différentiables à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  n'est pas de dimension finie. Cependant, pour ce que nous voulons nous pouvons tout de même considérer une petite variation du chemin, et donner un sens à la différentielle d'une fonctionnelle (c'est à dire une fonction sur un espace de fonctions).

**Théorème 29** *Soit  $L(m, \dot{m}, t)$  une fonction différentiable par rapport à ses trois variables. À un chemin  $\gamma = \{m(t)\}; t \in [t_0, t_1], m(t) \in \mathbb{R}^n$  associons la fonctionnelle*

$$\Phi\gamma = \int_{t_0}^{t_1} L(m(t), \dot{m}(t), t) dt.$$

*Cette fonctionnelle est différentiable, et sa différentielle est donnée par la formule*

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \right] h dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \Big|_{t_0}^{t_1}$$

On dira qu'un chemin  $\gamma$  est *extrémal* pour la fonctionnelle  $\Phi(\gamma)$  si la différentielle de  $\Phi$ ,  $F$ , satisfait la condition

$$F(\gamma, h) = 0 \quad \forall h.$$

**Théoreme 30** Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un chemin  $\gamma = \{m(t)\}$  soit extrémal pour la fonctionnelle  $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(m(t), \dot{m}(t), t) dt$  sur l'espace des chemins d'origine  $m_0 = m(t_0)$  et d'extrémité  $m_1 = m(t_1)$  est que sur le chemin  $\gamma$  (c'est à dire pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \right) - \frac{\partial L}{\partial m} = 0$$

**exemple** La longueur du chemin  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ :  $\text{longueur}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{m}(t)| dt$ . En mécanique on considère le mouvement d'un point, disons de masse 1, dans un champ de potentiel  $U(m)$ . Les trajectoires des points sont extrémales pour la fonctionnelle  $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{m}(t)|^2 - U(m(t)) dt$ .

Supposons d'abord  $U(m) \equiv 0$ . Soit  $x(t), y(t), z(t)$  les coordonnées de  $m(t)$ . L'équation d'Euler-Lagrange pour l'énergie s'écrit:

$$\frac{d}{dt} (\dot{m}) = 0$$

puisque la variable  $m$  n'apparaît pas dans l'écriture de l'énergie qui ne fait intervenir que le vecteur vitesse et non la position. Soit encore

$$\ddot{m} = 0 \text{ soit } \ddot{x} = 0, \ddot{y} = 0, \ddot{z} = 0, \text{ cas particulier des équations de Newton.} \quad (12.1)$$

Les solutions de cette équation différentielle du second ordre sont bien sûr les segments de droites paramétrés à vitesse constante  $x = at + b, y = ct + d, z = et + f$ .

**Remarque :**

Le fait qu'un chemin  $\gamma$  soit extrémal pour une fonctionnelle ne dépend pas du système de coordonnées choisies dans  $\mathbb{R}^n$ . Cela va nous permettre de considérer des chemins et des fonctionnelles sur des surfaces ou plus généralement des variétés.

### 12.2.1 Principe de d'Alembert

Nous nous intéressons maintenant à des chemins tracés sur une surface de  $\mathbb{R}^3$ . On pourrait sans changer une virgule traiter de même des chemins tracés sur des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ .

L'espace des chemins tracés sur une surface n'est plus un espace de Banach, mais seulement une "variété banachique". La fonctionnelle

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(m(t), \dot{m}(t), t) dt$$

a toujours un sens. On peut toujours dire que cette fonctionnelle est différentiable, et que sa différentielle est donnée par la formule

$$F(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \right] \xi dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Cependant il faut maintenant se limiter à des variations  $\xi = \{\xi(m)\}$  qui restent pour chaque point  $m \in \gamma$  dans l'espace  $T_m S$ .

On dira que  $\xi = \{\xi(m)\}$  est un champ de vecteurs tangent à  $S$  le long de  $\gamma$ , c'est à dire la donnée pour chaque valeur de  $t \in [t_0, t_1]$ , d'un vecteur  $\xi(m(t)) \in T_{m(t)} S$  qui varie continument avec  $t$ .

On dira maintenant qu'un chemin  $\gamma = \{m(t)\} \subset S$  est *extrémal* pour la fonctionnelle  $\Phi(\gamma)$  si la différentielle de  $\Phi, F$ , satisfait la condition

$$F(\gamma, \xi) = 0 \quad \forall \xi \text{ c'est à dire}$$

$$F(\gamma, \xi(m)) = 0 \quad \forall m \in \gamma, \quad \forall \xi(m) \in T_m S$$

**Théoreme 31** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un chemin  $\gamma$  soit extrémal pour la fonctionnelle  $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(m(t), \dot{m}(t), t) dt$  sur l'espace des chemins d'origine  $m_0 = m(t_0)$  et d'extrémité  $m_1 = m(t_1)$  contenus dans la surface  $S$  est que sur le chemin  $\gamma$  (c'est à dire que pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ )*

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{m}} \right) - \frac{\partial L}{\partial m} \right] (\xi(m)) = 0,$$

L'ensemble des champs de vecteurs tangents à  $S$  le long de  $\gamma$  joue le rôle de fibré tangent de la "variété banachique".

## 12.3 Enveloppes de droites

Nous avons mentionné dans un chapitre précédent l'application de Gauss  $\gamma$ . Si, en un point  $m$  d'une courbe nous tenons la droite affine tangente en  $m$  à la courbe (et pas seulement sa direction) nous obtenons une application  $C \mapsto \mathcal{A}(2, 1)$ . Réciproquement, à une famille lisse à un paramètre de droites affines correspond en général une courbe, l'enveloppe de cette famille de droites. Nous pouvons supposer que ces droites  $D_t$  sont données par une équation:

$$D_t = \{a(t)x + b(t)y + c(t) = 0\} \text{ où } a(t), b(t), c(t) \text{ sont des fonctions lisses de } t.$$

On peut voir une famille de droites comme une courbe dans la grassmannienne affine  $\Gamma \subset \mathcal{A}(2, 1)$ . Nous pouvons aussi orienter les droites  $D_t$ , par exemple en les voyant comme bord du demi-plan défini par l'inégalité  $a(t)x + b(t)y + c(t) > 0$ . La famille  $D_t$  devient une courbe tracée sur le cylindre  $\tilde{\Gamma} \subset \mathcal{Cyl}$  (voir la ??).

Les droites  $D_t$  et  $D_{t+h}$  se coupent dans le plan si elles ne sont pas parallèles. Lorsque  $h$  tend vers zéro, ce point d'intersection peut avoir une limite  $m(t)$ . Donnons ici une condition suffisante pour que cette limite  $m(t)$  existe pour tout  $t$ , et appartienne à une courbe dont la tangente en  $m(t)$  est la droite  $D_t$ .

**Théoreme 32** Soit  $D_t$  une famille lisse de droites d'équations:

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0; (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si  $t \in [\alpha, \beta]$ , le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{pmatrix}$$

est différent de zéro, la famille admet pour enveloppe une courbe  $C$ , ce qui veut dire que la courbe  $C$  est l'ensemble des points:  $m(t) = D_t \cap D'_t$ , où  $D'_t$  est la droite affine d'équation  $a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0$ .

De plus, si le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) & c(t) \\ a'(t) & b'(t) & c'(t) \\ a''(t) & b''(t) & c''(t) \end{pmatrix}$$

est lui aussi différent de zéro, La courbe  $C$  admet une tangente en  $m(t)$  qui est la droite  $D_t$ .

Nous noterons  $D''_t$  la droite d'équation  $a''(t)x + b''(t)y + c''(t) = 0$ .

**Démonstration** : Cherchons le point d'intersection des droites  $D_t$  et  $D_{t+h}$ . Il faut pour cela résoudre le système d'équations linéaires:

$$\begin{aligned} a(t)x + b(t)y + c(t) &= 0 \\ a(t+h)x + b(t+h)y + c(t+h) &= 0 \end{aligned}$$

Un développement de Taylor de la seconde équation permet de remplacer le système par:

$$\begin{aligned} a(t)x + b(t)y + c(t) &= 0 \\ (a(t) + a'(t)h + o(h))x + (b(t) + b'(t)h + o(h))y + (c(t) + c'(t)h + o(h)) &= 0 \end{aligned}$$

Il est maintenant équivalent au système:

$$\begin{aligned} a(t)x + b(t)y + c(t) &= 0 \\ [a'(t)h + o(h)]x + [b'(t)h + o(h)]y + [c'(t)h + o(h)] &= 0 \end{aligned}$$

Si le déterminant  $\det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{pmatrix} \neq 0$ , la limite de la solution quand  $h$  tend vers zéro, est la solution  $m(t)$  du système:

$$\begin{aligned} a(t)x + b(t)y + c(t) &= 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) &= 0 \end{aligned} \tag{12.2}$$

La condition  $\det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) & c(t) \\ a'(t) & b'(t) & c'(t) \\ a''(t) & b''(t) & c''(t) \end{pmatrix} \neq 0$  garantit que les trois droites  $D, D'$  et  $D''$  n'appartiennent pas au même faisceau.

Soit  $p_{t,h} = D_t \cap D'_{t+h}$ ,  $m_{t,h} = D_t \cap D_{t+h}$  et  $q_{t,h} = D'_t \cap D'_{t+h}$ .

Si les deux droites  $D'_t$  et  $D''_t$  se coupent en un point  $q_t$ , c'est à dire si  $\det \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} \neq 0$ , nous pouvons voir sur la figure (12.3 une démonstration géométrique du fait que  $D_t$  est tangente à l'enveloppe. comme le point  $m_{t,h}$  tend vers  $m_t$ , tandis que l'angle entre  $D_t$  et  $D_{t+h}$  est un  $O(h)$ , la distance  $m_{t+h}, p_{t+h}$  est un  $o(h)$ . Comme  $q_{t,h}$  tend vers  $q_t$  qui est différent de  $m_t$ , la distance  $m_t, p_{t,h}$  est de l'ordre de  $h$ , et donc la distance  $m_{t+h}, p_{t+h}$  est négligeable devant la distance  $m_t, p_{t,h}$ . Cela montre que la limite de la droite contenant la corde  $m(t), m(t+h)$  est  $D_t$ ; voir la figure 12.3  $\square$

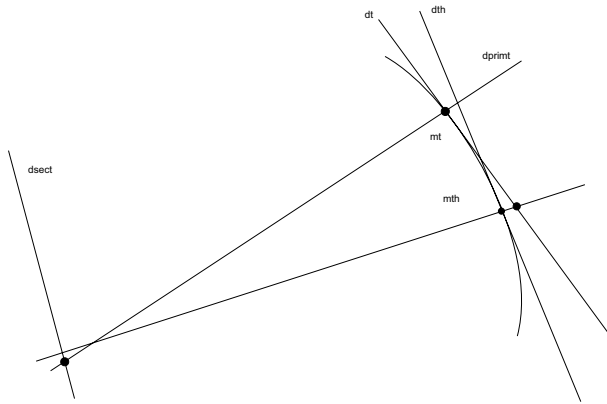


Figure 12.1: Un arc d'enveloppe non dégénéré

Les faisceaux linéaires sont en ce sens des enveloppes “dégénérées”, et l'enveloppe dégénère en un point.

Si le point  $q_{t_0}$  “est à l'infini”, ce qui veut dire que quand  $t$  tend vers  $t_0$ , les droites  $D_t$  tendent à être parallèles, le résultat reste vrai à condition de ce placer dans le plan projectif.

**Exercice** Vérifier que les tangentes à une hyperboles et les deux asymptotes ne satisfont pas les conditions  $D_t$  lisse et

$$\det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) & c(t) \\ a'(t) & b'(t) & c'(t) \\ a''(t) & b''(t) & c''(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

### 12.3.1 Enveloppe des normales à une courbe plane

Notons  $T(m) = \frac{dm}{ds}$  le vecteur unitaire tangent à la courbe  $C$ , où  $s$  est un paramétrage de  $C$  par la longueur de l'arc  $m_0m \subset C$ ,  $N(m)$  le vecteur normal unitaire  $N(m) = \mathcal{R}_{\pi/2}(T(m))$ , et  $k(m)$  la courbure de la courbe  $C$  en  $m$  définie par  $\frac{dT}{ds} = k(m) \cdot N(m)$ .

Les droite  $D(m)$  ont une enveloppe dont les points sont obtenus en considérant l'intersection de  $D(m)$  et de la droite  $D'(m)$  obtenue en dérivant l'équation de  $D(m)$  par

rapport au paramètre  $s$ . L'équation de la normale  $D(m)$  est  $D(m) \cdot \langle \overrightarrow{mM} | T(m) \rangle = 0$ . L'équation de la droite dérivée est :  $D'(m) \cdot \langle T(m) | T(m) \rangle + \langle \overrightarrow{mM} | k(m) \cdot N(m) \rangle = 0$ . Remarquons que la droite  $D'(m)$  est orthogonale à  $D(m)$  et coupe  $D(m)$  en un point  $F(m)$  à distance  $R(m) = \frac{1}{k(m)}$  de  $m$ , qui est le centre du cercle osculateur à la courbe en  $m$ .

Il reste à vérifier que la famille  $D(m)$  vérifie aussi la condition garantissant que l'ensemble des points  $F(m)$  forme une courbe ayant en chaque point comme tangente la droite  $D(m)$ . Pour cela il faut dériver une fois de plus et vérifier que la droite obtenue  $D''(m)$  coupe les deux droites  $D(m)$  et  $D'(m)$  en un point différent de  $F(m)$ .

# Bibliography

- [1] V. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Edition MIR, traduction française (1976).
- [Au] M. Audin. *Géométrie*, collection enseignement sup //// Mathématiques EDP sciences, Paris (2006).
- [Ban1] T. Banchoff. *Critical points and curvature for embedded polyedral surfaces*. American Mathematical Monthly vol 77 (1970) p.475-486.
- [Be] M. Berger. *Géométrie I et II* Nathan, Paris (1990).
- [Cau] A.L. Cauchy. *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*, mémoires de l'académie des sciences, Paris **22** (1850) p.3-15.
- [doCa1] M. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall (1976).
- [doCa2] M. do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser (1992).
- [Cau] A.L. Cauchy. *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadratures des surfaces courbes*. Mémoires des l'académie des sciences Paris 22 (1850)p. 3–15.
- [Eu1] L. Euler. *Recherches sur la courbure des surfaces*, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [16] (1760), 1767, p.119-143; in Opera omnia I 28, Commentationes geometricae Lausanne 1955 p.1-22.
- [Ga0] Carl Friedrich Gauss. *Recherches générales sur les surfaces courbes*, (traduction Capitaine Tiburce Abadie) Nouvelles annales de mathématiques vol **11** (1852).
- [Ga] Carl Friedrich Gauss. , traduction française *recherche générales sur les surfaces courbes* par E. Roger Albert Blanchard, Paris (1967).
- [Hi] D. Hilbert. *Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Math. Annalen **38** (1891) p.459-450.
- [Hi-Co] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie*, Springer (1932); traduction anglaise *Geometry and imagination*, Chelsea (1952).

- [Mo1] G. Monge. *Géométrie descriptive*. Paris, Beaudoin an VII (1798 ou 1799); réédition Jacques Gabay, Sceaux, France (1989).
- [Mil1] J. Milnor. *Topology from differential viewpoint*, The University Press of Virginia, second edition (1969).
- [Mil2] J. Milnor. *Morse Theory*, Princeton University Press **51** (1963).
- [Pea] G. Peano. *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. annalen **36** p.157-160.
- [Pha] F. Pham. *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*, Dunod Paris (1999).
- [Spi] M. Spivak *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish (1970 and 1979).