

Algèbre Partiel

Question 1 :

- (1) Soient V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} , U un sous-espace vectoriel de V et $\pi : V \rightarrow V/U$ la projection canonique. On se donne une base \mathcal{B} de U que l'on complète en une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de V et on pose $\mathcal{B}' = \tilde{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{B}$. Montrer que $\pi(\mathcal{B}')$ est une base de V/U .
- (2) Soient V_1, V_2 deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} et U_1, U_2 des sous-espaces vectoriels de V_1, V_2 , respectivement. Pour $v \in V_i$, on notera \bar{v} l'élément de V_i/U_i représenté par v . Montrer qu'il existe une application linéaire $\varphi : V_1 \otimes V_2 \rightarrow \frac{V_1}{U_1} \otimes \frac{V_2}{U_2}$ telle que $\varphi(v_1 \otimes v_2) = \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2$ pour tout $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$.
- (3) Montrer que $(U_1 \otimes V_2) + (V_1 \otimes U_2)$ est inclus dans le noyau de φ .
- (4) Pour $i = 1, 2$ on se donne une base \mathcal{B}_i de U_i que l'on complète en une base $\tilde{\mathcal{B}}_i$ de V_i et on pose $\mathcal{B}'_i = \tilde{\mathcal{B}}_i \setminus \mathcal{B}_i$. Soient $\hat{\mathcal{B}}_1 = \{e_1 \otimes e_2 \mid (e_1, e_2) \in \mathcal{B}_1 \times \tilde{\mathcal{B}}_2\}$ et $\hat{\mathcal{B}}_2 = \{e_1 \otimes e_2 \mid (e_1, e_2) \in \tilde{\mathcal{B}}_1 \times \mathcal{B}_2\}$. Montrer que $\hat{\mathcal{B}}_1 \cup \hat{\mathcal{B}}_2$ est une base de $(U_1 \otimes V_2) + (V_1 \otimes U_2)$. En déduire une base de $\frac{V_1 \otimes V_2}{(U_1 \otimes V_2) + (V_1 \otimes U_2)}$.
- (5) Soit $\hat{\varphi} : \frac{V_1 \otimes V_2}{(U_1 \otimes V_2) + (V_1 \otimes U_2)} \rightarrow \frac{V_1}{U_1} \otimes \frac{V_2}{U_2}$ l'application linéaire induite par φ . Montrer que $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Question 2 : Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{K} .

- (1) Montrer que l'application $\text{Tr} : \mathcal{L}(V) = V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\text{Tr}(\alpha \otimes v) = \alpha(v)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(V)$.
- (2) Soient $f, g \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g \circ f)$.
- (3) Soient $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V , $f \in \mathcal{L}(V)$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f dans la base B . Montrer que

$$\text{Tr}(f) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}.$$

- (4) Soit $T : \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant $T(f \circ g) = T(g \circ f)$ pour tous $f, g \in \mathcal{L}(V)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $T = \lambda \text{Tr}$.