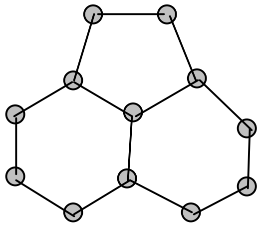
SOLUTION – 019.

Si on joint chaque trou d'une balle de golf officielle à ses trous voisins, on obtient une triangulation de la sphère. Or pour des raisons d'esthétique, chaque trou a exactement **5** ou **6** voisins.



Démontrer qu'il y a exactement 12 trous ayant 5 voisins.

La triangulation obtenue en joignant les trous a S sommets, F faces triangulaires et A arêtes, S, F, A étant liés par la relation d' Euler : S + F = A + 2.

On a F faces triangulaires donc $\frac{3F}{2}$ arêtes car chacune est comptée 2 fois.

Ainsi $A = \frac{3F}{2}$ ce qui entraîne S + F = $\frac{3F}{2}$ d'où $S = \frac{F}{2} + 2$.

Désignons par S_5 le nombre respectif de sommets d'ordre 5 et par S_6 le nombre respectif de sommets d'ordre 6.

Cela fait au total $5\,S_5 + 6\,S_6$ arêtes, mais chacune est comptée 2 fois, donc

$$5\,S_5 + 6\,S_6 = 2\,A = 3\,F \qquad (1)$$

par ailleurs $S_5 + S_6 = S = \frac{F}{2} + 2$ donc $5\,S_5 + 5\,S_6 = \frac{5F}{2} + 10$ (2)

En soustrayant membre à membre (1) et (2) on a $S_6 = \frac{F}{2} - 10$ et donc

$\mathbf{S_5} = S - S_6 = \frac{F}{2} + 2 - \frac{F}{2} + 10 = \mathbf{12}$ ce qu'il fallait démontrer..