Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé : Hiérarchies intégrables et espaces des modules des courbes.

Intitulé en anglais : Integrable hierarchies and moduli spaces of curves.

Unité de recherche : Institut de Mathématiques de Bourgogne
UMR 5584 CNRS

Nom, prénom et courriel du directeur de thèse : Rossi Paolo, paolo.rossi@u-bourgogne.fr

Domaine scientifique principal de la thèse : Géométrie/Physique-Mathématique

Domaine scientifique secondaire de la thèse :

Description du projet scientifique

Depuis les années '90 et la conjecture de Witten, un lien profonde et surprenant entre la théorie de l'intersection de l'espace des modules des courbes stables et les hiérarchies intégrables de EDP Hamiltoniennes a fourni une impressionnante source d'inspiration et résultats qui est, encore aujourd'hui, un moteur puissant dans le développement à l'interface entre la géométrie et physique mathématique.

L'espace des modules des courbes stables est l'espace de toutes possibles surfaces de Riemann (variétés complexes de dimension 1) compactes, sans bord, lisses ou avec singularités nodales. Il est un objet très naturel du point de vue du problème de classification, mais il rentre aussi en plusieurs techniques pour l'étude des propriétés géométriques des variétés complexes ou symplectiques en plus haute dimension (en particulier la théorie de Gromov-Witten, qui étude l'énumération des courbes dans un espace donné).

Les systèmes intégrables de EDP évolutives Hamiltoniennes sont des systèmes de EDP avec la structure d'un système Hamiltonien sur un espace des phases infini-dimensionnel. La caractéristique principale de l'intégrabilité est la présence d'un nombre infini de quantités conservées par leurs solutions. Cette propriété permet souvent de résoudre, plus ou moins explicitement, le système.

Witten et, après lui, Kontsevich, Manin, Dubrovin, GIvental et autres, ont découvert que certaines profondes propriétés géométriques de l'espace des modules des courbes sont contrôlées par des systèmes intégrables. L'intégrabilité, ici, joue un rôle clé en suggèrent que ce soit possible de décrire relativement explicitement la géométrie de cet objet compliqué. Dans l'autre direction, la connaissance de l'espace de modules a donné plusieurs résultats applicables à la physique mathématique qui est derrière aux systèmes intégrables, en un échange mutuel de techniques et théorèmes entre les deux disciplines.

Très récemment, de l'interface entre la topologie symplectique et la géométrie algébrique, un nouveau lien, de nature plutôt différent, entre ces mêmes deux sujets, est émergé et plusieurs questions fondamentales ont devenues centrales. A. Buryak, inspirés par la théorie symplectique des champs de Eliashberg, Givental et Hofer, a formalisé cette nouvelle façon d'associer un système intégrable (qui s'appelle hiérarchie de ramification double) a une théorie cohomologique de champ (une structure géométrique naturelle sur l'espace des courbes), et dans une série de travaux avec moi, on a étudiée et démontré plusieurs propriété intéressantes de cette nouvelle hiérarchie : comment la construire à partir d'un minimum d'information géométrique, comment la quantifier en sauvegardant l'intégrabilité (ce qui fournit un pont inédit vers un des domaines les plus populaires de la physique mathématique, celui de la théorie des champs quantiques intégrables), etc. Le sujet a attiré un certain intérêt et les questions et conjectures se sont multipliées. Une partie de ca est bien approchable à niveau d'une thèse de doctorat et il consisterait en une très bonne introduction à un sujet de recherche plus vaste et très actif en France et à l'étranger. Les exemples calculables sont nombreux et il y a un fort intérêt mêmes dans les cas les plus tractables sans des années d'expérience sur le champ.

Littérature :

Je fournis ici une liste de publications utile à se former une idée plus précise sur le sujet. Il s'agit de publications spécialisées, donc il ne faut pas s'inquiéter trop si elles sont difficiles à comprendre à une première lecture.

D. Zvonkine, "An introduction to moduli spaces of curves and their intersection theory", chapitre de livre, disponible en ligne.

B. A. Dubrovin, Y. Zhang, "Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants", arXiv:math/0108160v1.

P. Rossi, "Integrable systems and holomorphic curves", Proceedings of the Gokova Geometry-Topology Conference 2009, International Press, April 2010.

A. Buryak, "Double ramification cycles and integrable hierarchies", Communications in Mathematical Physics 336 (2015), no. 3, 1085-1107.

A. Buryak, P. Rossi, "Recursion relations for double ramification hierarchies", Communications in Mathematical Physics, March 2016, Volume 342, Issue 2, pp 533-568.

A. Buryak, P. Rossi, "Double Ramification Cycles and Quantum Integrable Systems", Letters in Mathematical Physics, March 2016, Volume 106, Issue 3, pp 289-317.

P. Rossi, "Integrability, quantization and moduli spaces of curves", preprint arXiv:1703.00232.

A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi, "Integrable systems of double ramification type", preprint arXiv:1609.04059.

A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi, "Tau-structure for the Double Ramification Hierarchies", preprint arXiv:1602.05423.

P. Rossi, “Integrable systems and moduli spaces of curves”, Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, soutenue à l’Université de Bourgogne (Dijon) le 28/11/2016, https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01444750

Connaissances et compétences requises :

Notions de base de géométrie différentielle et complexe (variétés, fibrés, calcul tensoriel) ;
Notions de base de topologie différentielle (cohomologie, classes caractéristiques) ;
Notions de base de physique mathématique (systèmes Hamiltoniens, bases de quantification).