

Algèbre Examen

Question 1 :

- (1) Soit V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} . Donner la définition d'algèbre tensorielle de V (notée $T(V)$). Attention : on ne demande pas de démontrer que $T(V)$ est une algèbre.
- (2) Soit j l'injection canonique de V dans $T(V)$. Montrer que, pour tout couple (B, f) constitué d'une algèbre B sur \mathbb{K} et d'une application linéaire f de V dans l'espace vectoriel B , il existe un morphisme d'algèbres \tilde{f} de $T(V)$ dans B prolongeant f , c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & T(V) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & B \end{array}$$

Question 2 :

- (1) On dit qu'un anneau A est un *corps gauche* si, pour tout $a \in A \setminus \{0_A\}$, il existe $b \in A$ tel que $ba = 1_A$. Montrer qu'un anneau A est un corps gauche si et seulement si A n'a que deux idéaux à gauche : $\{0_A\}$ et A .
- (2) Soient M un module sur un anneau A et $\text{End}_A(M)$ l'ensemble des endomorphismes (de A -modules) de M . On définit l'opération $+$ sur $\text{End}_A(M)$ par

$$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \text{End}_A(M)$ et $x \in M$. Montrer que $\text{End}_A(M)$ muni de $+$ et \circ est un anneau (unitaire).

- (3) Soient A un anneau et S un module simple sur A . Montrer que tout endomorphisme $\alpha : S \rightarrow S$ différent de 0 est inversible. En déduire que $\text{End}_A(S)$ est un corps gauche.
- (4) Soient \mathbb{K} un corps, V un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie, et $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ l'algèbre des endomorphismes \mathbb{K} -linéaires de V . Montrer que V est un module simple sur A et $\text{End}_A(V) \simeq \mathbb{K}$ (on admettra que le centre de A est formé des homothéties).

Question 3 : Soient G un groupe fini, et V_1, V_2 deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Soient $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$, $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations linéaires simples de G et $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire telle que $\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$ pour tout $g \in G$.

- (1) Montrer que, si φ n'est pas un isomorphisme, alors $\varphi = 0$.
- (2) Supposons $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$. Montrer que φ est une homothétie.