Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2011-2012
Janvier 2012

Algèbre
Corrigé de l'examen

Question 1 : **(1)** On définit $V^{\otimes n}$ par récurrence sur n comme suit.

- $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ et $V^{\otimes 1} = V$;
- si $n \geq 2$, alors $V^{\otimes n} = V^{\otimes (n-1)} \otimes V$.

Remarquons que, si $p, q \in \mathbb{N}^*$, $u \in V^{\otimes p}$ et $v \in V^{\otimes q}$, alors $u \otimes v \in V^{\otimes (p+q)}$. Si $p = 0$ on posera $u \otimes v = u \cdot v \in V^{\otimes q}$, et si $q = 0$, on posera $u \otimes v = v \cdot u \in V^{\otimes p}$. On pose

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

et on définit une opération $\cdot$ sur A comme suit. Soient $a, b \in A$. On écrit

$$a = u_0 + u_1 + \cdots + u_p \text{ et } b = v_0 + v_1 + \cdots + v_q \,,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$, $u_i \in V^{\otimes i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $v_j \in V^{\otimes j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$. Alors

$$a \cdot b = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i+j=k} u_i \otimes v_j \right) .$$

On peut vérifier que A muni des opérations internes $+, \cdot$ et de la multiplication externe est une algèbre sur $\mathbb{K}$. Cette algèbre s'appelle *l'algèbre tensorielle de* V.

(2) Soit $f_n : V^n \to B$ l'application définie par

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f(v_1)\, f(v_2) \cdots f(v_n) \,.$$

Cette application est n-multilinéaire, donc induit une application linéaire $\tilde{f}_n : V^{\otimes n} \to B$. Si $n = 0$, on définit $\tilde{f}_0 : \mathbb{K} = V^{\otimes 0} \to B$ par $f_0(\lambda) = \lambda\, 1_B$. On vérifie facilement que, si $v \in V^{\otimes n}$ et $u \in V^{\otimes m}$, alors

$$\tilde{f}_n(v)\, \tilde{f}_m(u) = \tilde{f}_{n+m}(v \otimes u) \,.$$

Soit $a \in T(V)$. On écrit a sous la forme $a = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$, où $v_i \in V^{\otimes i}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, et on pose

$$\tilde{f}(a) = \tilde{f}_0(v_0) + \tilde{f}_1(v_1) + \cdots + \tilde{f}_n(v_n) \,.$$

Soient $a, b \in A$. On écrit

$$a = u_0 + u_1 + \cdots + u_p \text{ et } b = v_0 + v_1 + \cdots + v_q \,,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$, $u_i \in V^{\otimes i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $v_j \in V^{\otimes j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$. Alors

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a \cdot b) = \sum_{k=0}^{p+q} \tilde{f}_k \left(\sum_{i+j=k} u_i \otimes v_j \right) = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i+j=k} \tilde{f}_k(u_i \otimes v_j) \right) \\ = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i+j=k} \tilde{f}_i(u_i)\, \tilde{f}_j(v_j) \right) = \left(\sum_{i=0}^{p} \tilde{f}_i(u_i) \right) \left(\sum_{j=0}^{q} \tilde{f}_j(v_i) \right) = \tilde{f}(a)\, \tilde{f}(b)\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\tilde{f}(1_{T(V)}) = \tilde{f}_0(1_{\mathbb{K}}) = 1_B\,.$$

Comme $\tilde{f}$ est linéaire par définition, ceci montre que $\tilde{f}$ est un homomorphisme d'algèbres.

Question 2 : (1) Soit A est un corps gauche. Soit L un idéal à gauche de A différent de $\{0_A\}$. Soit $a \in L$, $a \neq 0$. Par définition, il existe $b \in A$ tel que $ba = 1_A$. Si $x \in A$, alors

$$x = x\, 1_A = (xb)a \in L\,.$$

Ceci montre que $A \subset L$, c'est-à-dire $L = A$. D'où A n'a que deux idéaux à gauche : A et $\{0_A\}$.

Supposons que A n'a que deux idéaux à gauche : A et $\{0_A\}$. Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$. Notons L l'idéal à gauche engendré par a. Comme $L \neq \{0_A\}$, car $a \in L$, on a $L = A$, donc $1_A \in L$, donc il existe $b \in A$ tel que $ba = 1_A$.

(2) On note $0 : M \to M$ l'endomorphisme qui à tout $x \in M$ associe 0_M. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{End}_A(M)$. Pour tout $x \in M$ on a :

$$\begin{aligned}((\alpha + \beta) + \gamma)(x) = (\alpha + \beta)(x) + \gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) \\ = \alpha(x) + (\beta + \gamma)(x) = (\alpha + (\beta + \gamma))(x)\,.\end{aligned}$$

$$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x) = \beta(x) + \alpha(x) = (\beta + \alpha)(x)\,.$$

$$(\alpha + 0)(x) = \alpha(x) + 0(x) = \alpha(x) + 0_M = \alpha(x)\,.$$

On définit $(-\alpha) : M \to M$ par $(-\alpha)(x) = -\alpha(x)$. Il est clair que $-\alpha \in \mathrm{End}_A(M)$.

$$(\alpha + (-\alpha))(x) = \alpha(x) - \alpha(x) = 0_M = 0(x)\,.$$

Ceci montre que $(A, +)$ est un groupe abélien. Il est clair que la loi $\circ$ est associative et que $\alpha \circ \mathrm{Id}_M = \mathrm{Id}_M \circ \alpha = \alpha$.

$$\begin{aligned}(\alpha \circ (\beta + \gamma))(x) = \alpha((\beta + \gamma)(x)) = \alpha(\beta(x) + \gamma(x)) = \alpha(\beta(x)) + \alpha(\gamma(x)) \\ = (\alpha \circ \beta)(x) + (\alpha \circ \gamma)(x) = ((\alpha \circ \beta) + (\alpha \circ \gamma))(x)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\alpha + \beta) \circ \gamma)(x) = (\alpha + \beta)((\gamma)(x)) = \alpha((\gamma)(x)) + \beta((\gamma)(x)) \\ = (\alpha \circ \gamma)(x) + (\beta \circ \gamma)(x) = ((\alpha \circ \gamma) + (\beta \circ \gamma))(x)\end{aligned}$$

Ceci montre que $(\mathrm{End}_A(M), +, \circ)$ est un anneau.

(3) Soit $\alpha : S \to S$ un endomorphisme différent de 0. $\operatorname{Ker}\alpha$ est un sous-module de S différent de S, car α est différent de 0, donc $\operatorname{Ker}\alpha = \{0_S\}$. $\operatorname{Im}\alpha$ est un sous-module de S différent de $\{0_S\}$, car α est différent de 0, donc $\operatorname{Im}\alpha = S$. Ceci montre que α est inversible.

On vient de montrer que tout $\alpha \in \operatorname{End}_A(S) \setminus \{0\}$ est inversible. Soit β l'inverse de α. Alors $\beta \in \operatorname{End}_A(S)$ et $\beta \circ \alpha = \operatorname{Id}$. Ceci montre que $\operatorname{End}_A(S)$ est un corps gauche.

(4) Soit $v_0 \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Pour tout $v \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ il existe $\alpha \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tel que $\alpha(v_0) = v$, donc V est engendré par v_0 comme A-module. Ceci montre que V est monogène et est engendré par tout élément de $V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, donc que V est un A-module simple.

On a un homomorphisme injectif $\varphi : \mathbb{K} \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$ qui à λ associe l'homothétie de rapport λ. Cet homomorphisme induit un plongement $\operatorname{End}_A(V) \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$. Montrons que $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{End}_A(V)$ (via cet homomorphisme).

Soit $\gamma \in \operatorname{End}_A(V)$. Pour tous $\alpha \in A = \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ et $v \in V$ on a

$$(\gamma \circ \alpha)(v) = \gamma(\alpha\, v) = \alpha\,(\gamma(v)) = (\alpha \circ \gamma)(v)\,.$$

On en déduit que γ est central dans $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) = A$, donc est une homothétie, donc est inclus dans $\operatorname{Im}\varphi$.

Soit $\gamma \in \operatorname{Im}\varphi$. Comme γ est central dans $A = \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$, pour tous $\alpha \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ et $v \in V$ on a

$$\gamma(\alpha\, v) = (\gamma \circ \alpha)(v) = (\alpha \circ \gamma)(v) = \alpha\,(\gamma(v))\,.$$

Ceci montre que $\gamma \in \operatorname{End}_A(V)$.

Question 3 : **(1)** On suppose que $\varphi \neq 0$ et on démontre que φ est un isomorphisme, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker}\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\operatorname{Im}\varphi = V_2$.

Soit $v \in \operatorname{Ker}\varphi$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\varphi(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(\varphi(v)) = \rho_2(g)(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}\,,$$

donc $\rho_1(g)(v) \in \operatorname{Ker}\varphi$. Ceci montre que $\operatorname{Ker}\varphi$ est invariant par ρ_1. Comme ρ_1 est simple et $\operatorname{Ker}\varphi \neq V_1$ (car $\varphi \neq 0$), on en déduit que $\operatorname{Ker}\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$.

Soit $w \in \operatorname{Im}\varphi$. Il existe $v \in V_1$ tel que $w = \varphi(v)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\rho_2(g)(w) = \rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)(v))\,,$$

donc $\rho_2(g)(w) \in \operatorname{Im}\varphi$. Ceci montre que $\operatorname{Im}\varphi$ est invariant par ρ_2. Comme ρ_2 est simple et $\operatorname{Im}\varphi \neq \{\overrightarrow{0}\}$ (car $\varphi \neq 0$), on en conclue que $\operatorname{Im}\varphi = V_2$.

(2) Maintenant on suppose que $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$. Soient λ une valeur propre de φ et $U \subset V_1$ l'espace des vecteurs porpres pour la valeur propre λ. Remarquons que $U \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Si $u \in U$, alors, pour tout $g \in G$,

$$\varphi(\rho_1(g)(u)) = \rho_1(g)(\varphi(u)) = \rho_1(g)(\lambda\, u) = \lambda\, \rho_1(g)(u)\,,$$

donc $\rho_1(g)(u) \in U$. Ceci montre que U est invariant par ρ_1. comme ρ_1 est simple et $U \neq \{\overrightarrow{0}\}$, on en conclue que $U = V_1$, donc que φ est l'homothétie de rapport λ.