Sur quelques difficultés associées à l'utilisation de l'approche risque-neutre en assurance

Version 1.0

Séminaire AST&Risk

du 17 janvier 2011

Frédéric PLANCHET
frederic.planchet@univ-lyon1.fr

Préambule

Le référentiel Solvabilité 2 (ainsi que les démarches MCEV et IFRS) privilégie pour l'évaluation des engagements d'un assureur, une approche par absence d'opportunité d'arbitrage inspirée du cadre théorique de détermination d'un prix sur un marché financier.

Cette approche, dite *market consistent*, conduit en pratique à distinguer deux techniques de calcul des provisions :

- pour un risque « couvrable », la provision est égale au prix qu'aurait un actif servant les mêmes flux ;

- pour un risque non couvrable, la provision est égale à la somme de l'évaluation *best estimate* et d'une marge pour risque.

Préambule

Une fois déterminées les provisions, il convient de projeter le bilan à un an pour évaluer le niveau de la marge de solvabilité minimale requise pour assurer la suffisance des fonds propres à un an avec une probabilité au moins égale à 99,5 %.

Un modèle actif / passif utilisé en assurance vie doit être en mesure de prendre en compte ces deux aspects, ce qui implique en particulier :

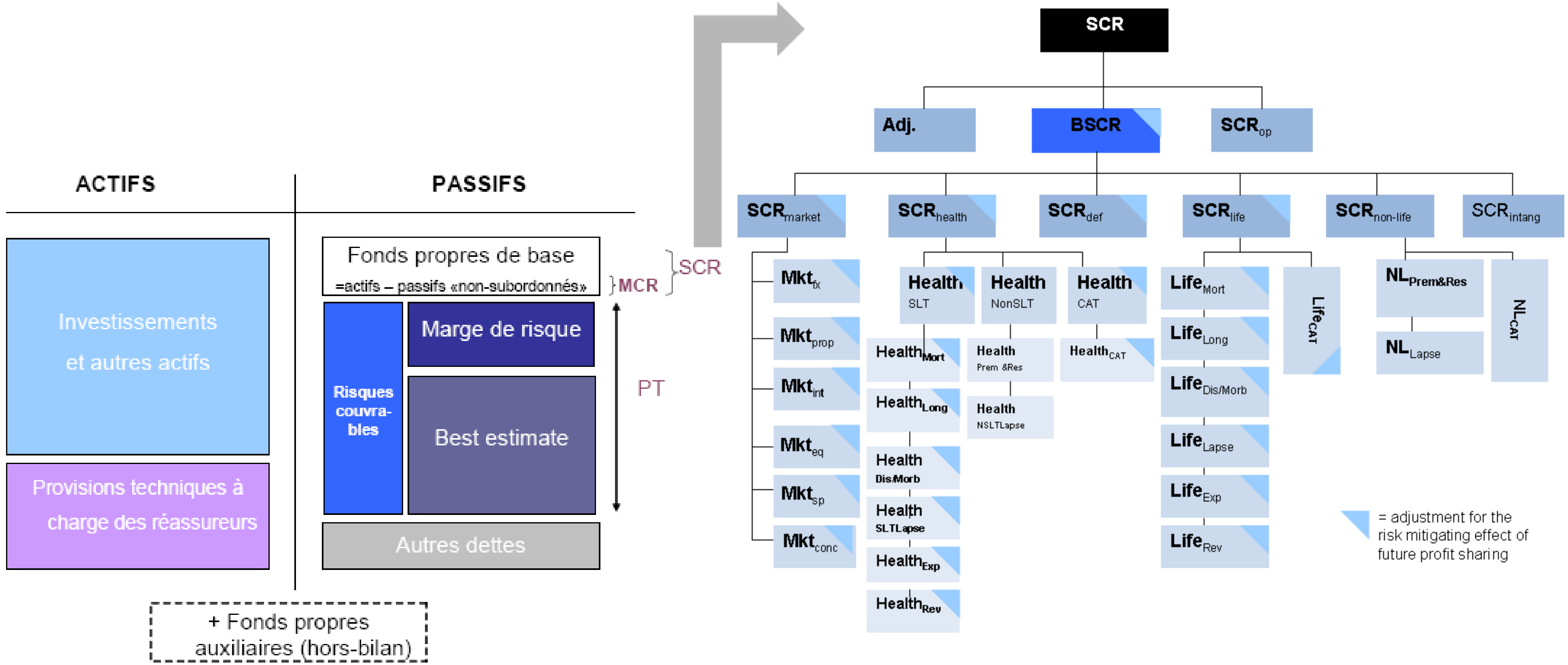
- de devoir calculer des prix (provisions) ;

- de devoir calculer des quantiles de la distribution de la NAV (SCR).

La prise en compte conjointe de ces deux éléments est potentiellement complexe car elle conduit à manipuler les facteurs de risque pour deux usages très différents.

Préambule

Le schéma de référence est le suivant (*cf*. CEIOPS [2010]) :



SOMMAIRE

QIS 5 pour un portefeuille d'épargne
Eléments quantitatifs

1. Le cadre standard

1.1. Le calcul du *best estimate*

Schématiquement, le calcul d'un *best estimate* en assurance vie (plus généralement en présence d'interactions actif / passif) conduit à devoir évaluer :

$$\Lambda = \sum_{j \geq 0} \frac{F_j}{\left(1 + R_j\right)^j} \longrightarrow BEL = E^{P^A \otimes Q^F}\left(\Lambda\right)$$

ce qui en pratique s'effectue par simulation :

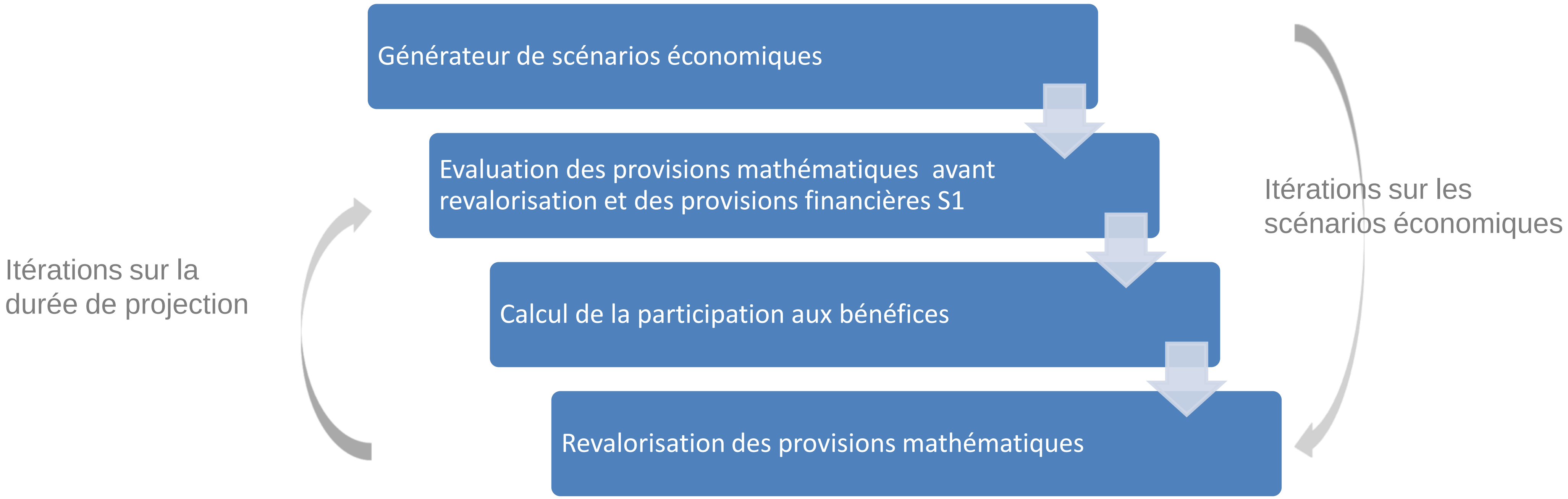
$$BEL = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \sum_{a=1}^{A} \frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{\left(1 + R_n\left(0,t\right)\right)^t}$$

La difficulté principale est le calcul du terme $Flux_{t,n,a}$ du fait des interactions avec les comptes sociaux.

1. Le cadre standard

1.1. Le calcul du *best estimate*

On peut synthétiser ces interactions par le schéma suivant :



$$G_t = TxPB_{fi} \times \left(-\Delta PF_t + VC_t - VC_{t-1}\right) - TxPB_{te} \times \Delta PM_t \;\Rightarrow\; PB_t = G_t - \Delta FPB_t \;\Rightarrow\; \tau_t = \frac{PB_t}{PM_t}$$

1. Le cadre standard

1.1. Le calcul du *best estimate*

Le GSE est un élément clé du calcul du BEL. Les contraintes qu'il doit satisfaire sont les suivantes :

- utiliser la courbe des taux ZC initiale comme paramètre ;

- permettre la prise en compte du risque de taux, du risque de défaut, du risque action et du risque immobilier ;

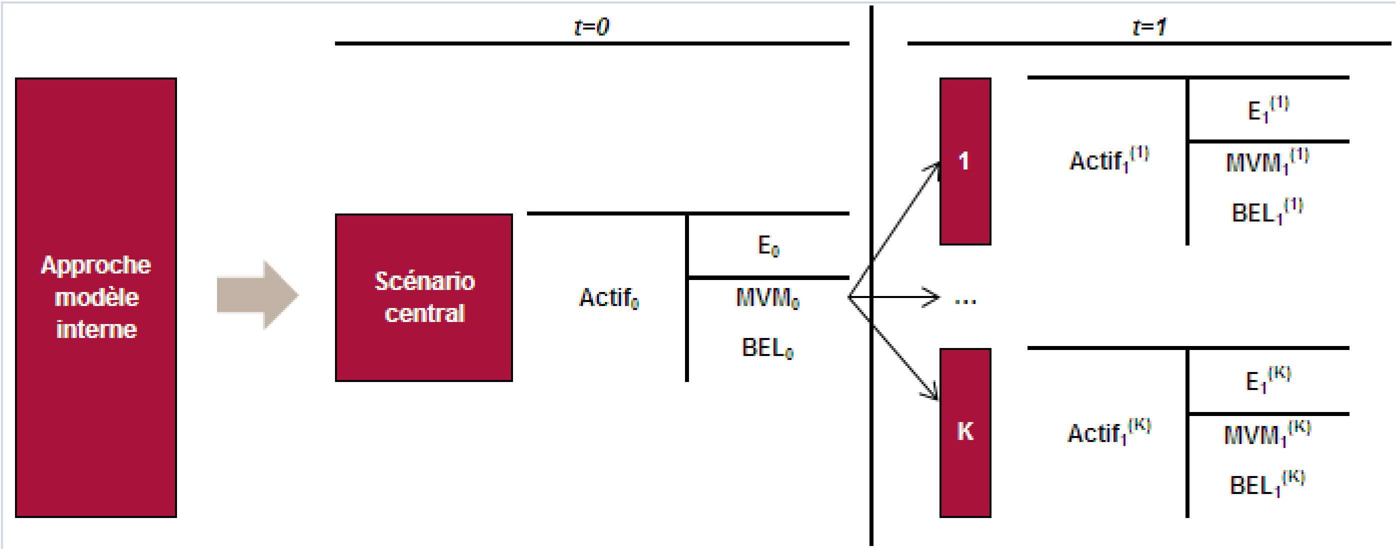
- être cohérent avec les prix observés ; pour la volatilité cela conduit à utiliser une volatilité implicite, mais avec quelle formule ? (B&S ou une formule cohérente avec le modèle retenu) ;

- être justifiable au regard de la description d'une situation économique.

1. Le cadre standard

1.2. Le calcul du SCR

Le calcul du SCR s'appuie sur la projection du bilan à un an (*cf*. Guibert et al.) :

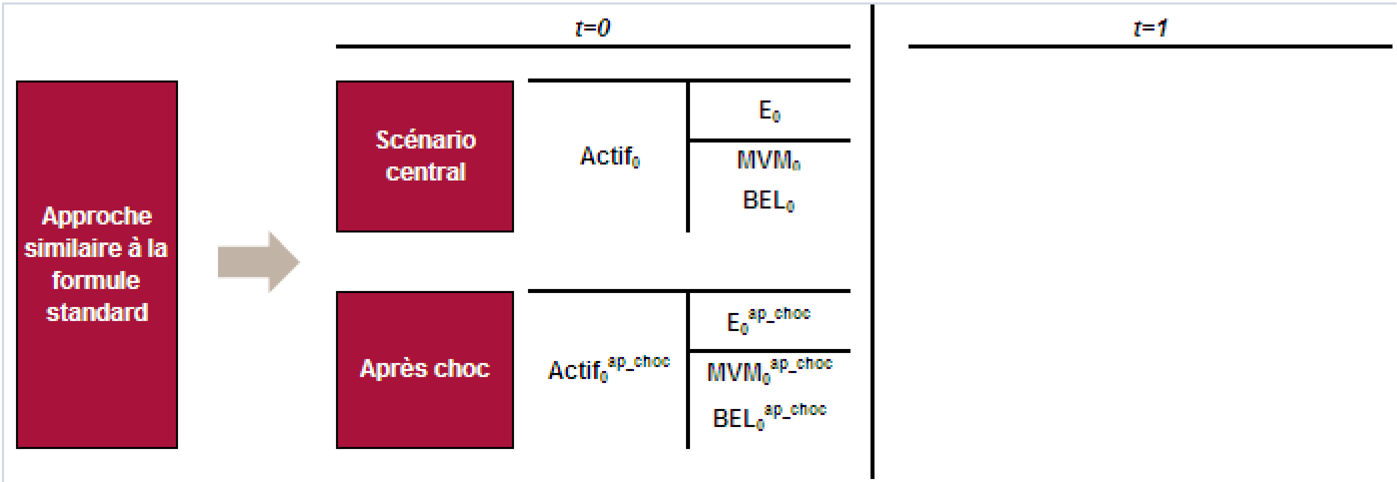


La projection des facteurs de risque sur un an est effectuée en probabilité historique.

1. Le cadre standard

1.2. Le calcul du SCR

La démarche est simplifiée dans le cadre du modèle standard :



Mais on perd alors le lien, et donc la cohérence, entre le comportement du GSE utilisé pour le calcul du BEL et le niveau des chocs (sensés être associés au quantile à 99,5 % de la distribution du facteur de risque).

1. Le cadre standard

1.3. Synthèse

Dans le cas d'un modèle standard, tout se ramène à définir un GSE pour le calcul des BEL.

Toutefois dans le cadre de l'ORSA et plus largement d'un éventuel modèle interne, il doit aussi être capable de fournir des projections des facteurs de risque sous la probabilité historique.

1. Le cadre standard

2. **Quelques observations**

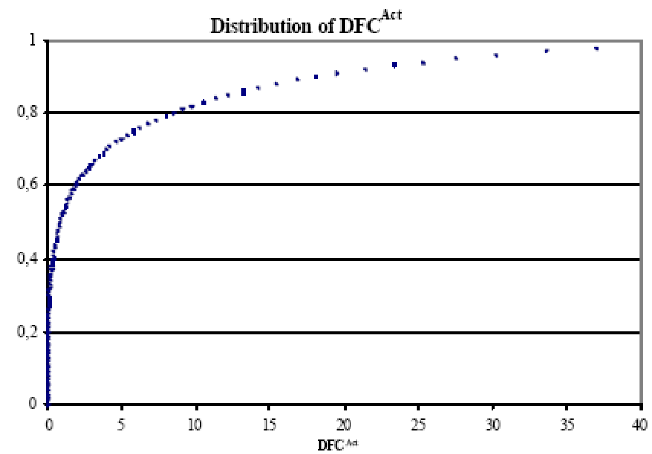
SOMMAIRE

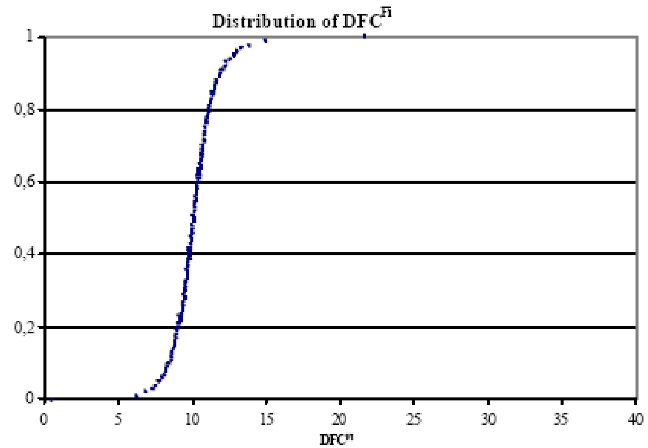
QIS 5 pour un portefeuille d'épargne
Eléments quantitatifs

2. Quelques observations

2.1. Gestion technique des engagements

La logique de calcul des provisions est intimement liée à la notion de couverture des risques ce qui implique que théoriquement les montants obtenus n'ont de sens que lorsque des couvertures sont mises en place et gérées :





La situation dans laquelle la gestion de la couverture n'est pas mise en œuvre est plus dangereuse. Le « prix » de la clause optionnelle n'a de sens qu'avec une gestion active du portefeuille de couverture. L'exigence de marge dans les deux situations est différente.

2. Quelques observations

2.1. Gestion technique des engagements

On peut distinguer deux situations sensiblement différentes :

- les garanties sur des contrats en UC (contrats *variable annuities*), pour lesquelles la dynamique du facteur de risque est exogène ;

- les garanties sur les contrats d'épargne en € (ex. taux garanti) pour lesquelles la dynamique du facteur de risque est (partiellement) endogène.

Le second cas est délicat car les actions du management ne sont pas couvrables.

<u>Exemple</u> : une garantie plancher sur un contrat en UC et une clause de taux garanti sont formellement très proches :

$$S_t + \left[K - S_t\right]^+ \qquad\qquad R_t + \left[r_g - R_t\right]^+$$

mais fondamentalement différentes.

2. Quelques observations

2.2. Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres doit notamment prendre en compte les éléments suivants :

- cohérence entre estimation historique et estimation risque neutre ;
- difficulté spécifique du rachat conjoncturel (*cf*. ACP [2010]) :

$$RC(R)=\begin{cases} RC_{\max} & si \quad R-TA<\alpha \\ RC_{\max}\dfrac{(R-TA-\beta)}{\alpha-\beta} & si \quad \alpha<R-TA<\beta \\ 0 & si \quad \beta<R-TA<\gamma \\ RC_{\min}\dfrac{(R-TA-\gamma)}{\delta-\gamma} & si \quad \gamma<R-TA<\delta \\ RC_{\min} & si \quad R-TA>\delta \end{cases}$$

avec *TA*=taux attendu par l'assuré, approché par le TME, *R*=taux servi. Sous quelle probabilité sont estimés les paramètres ci-dessus ?

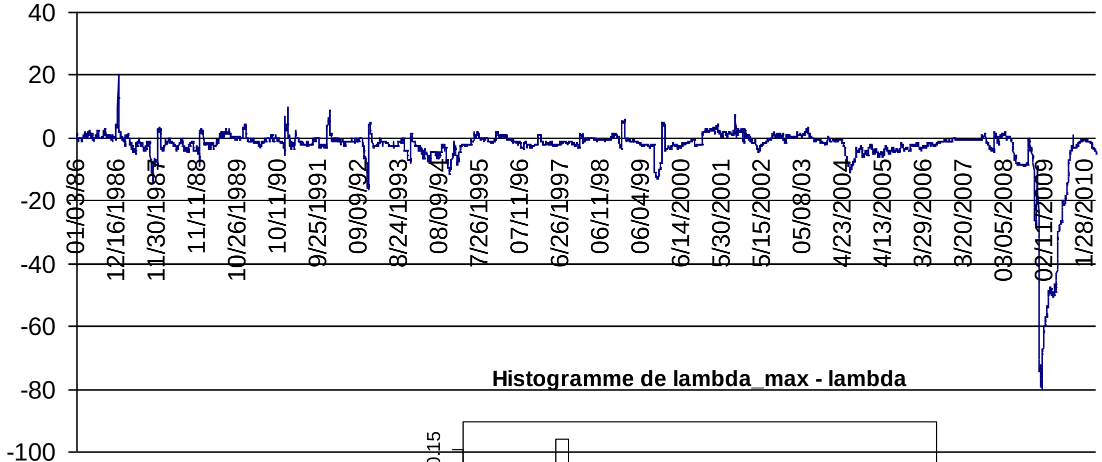
2. Quelques observations

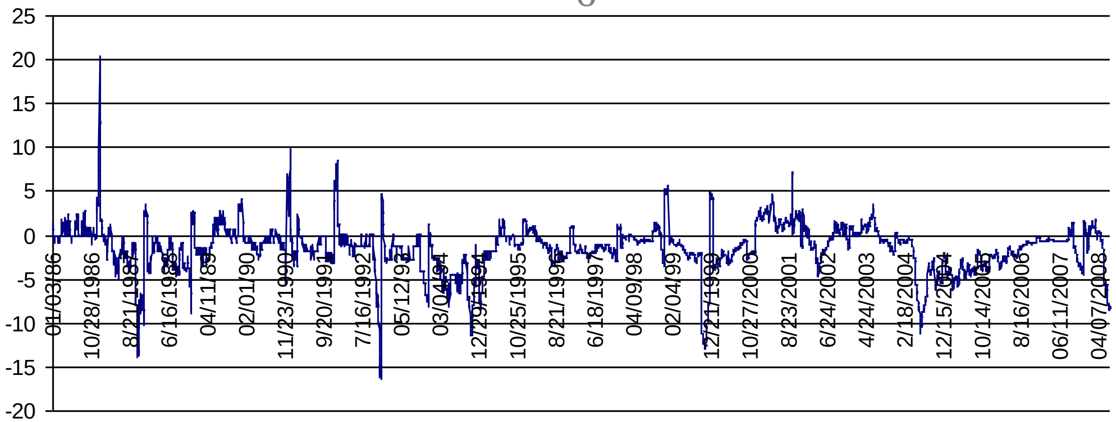
2.3. Importance du prix de marché du risque

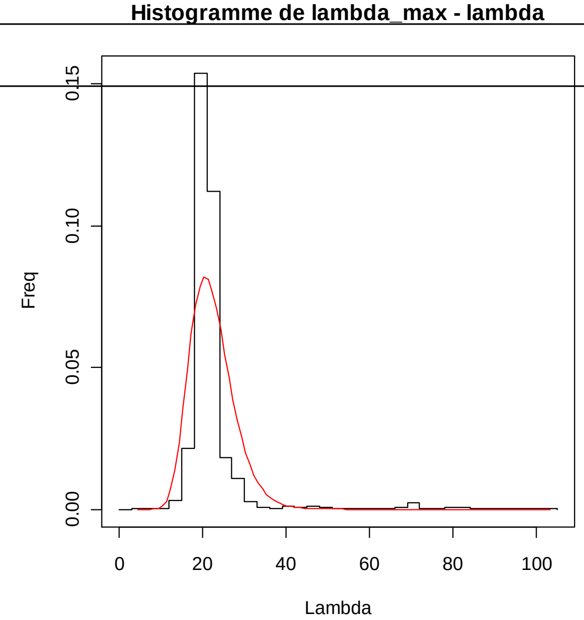
Le prix de marché du risque est très erratique

$$-\frac{\ln P}{T-t} = r + \frac{1}{2}(T-t)(u-\lambda w) + o(T-t)$$

$$\lambda_t = \frac{2\left(R_t^1 - R_t^{1,3}\right)}{\frac{1}{6}w} + \frac{u}{w}$$







2. Quelques observations

2.3. Importance du prix de marché du risque

La mise en œuvre dans le cadre d'un modèle de taux mono factoriel est simple

$$dr_t = \left(u_t - \lambda_t w_t\right)dt + w_t dW_t$$

$$d\lambda_t = \left(p_t + \lambda_t q_t\right)dt + q_t dW_t^2$$

$$\longrightarrow \quad P\left(t,T\right) = E_t\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right]$$

et on peut ensuite utiliser une approche par simulation :

$$P_K\left(t,T\right) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} r_k\left(t_i\right)\right)$$

Cela évite la contrainte usuellement imposée de disposer d'un modèle affine sous *P* et *Q* (*cf*. Stanton [1997] qui discute ce point et Caja et Planchet [2010]).

2.3. Importance du prix de marché du risque

Cette approche présente l'avantage d'utiliser directement les paramètres *u* et *w* du processus de taux court dans l'univers historique qui, complétés par la description de λ, permet de calculer des prix.

La logique de calibrage du modèle est alors « naturelle » :

- calibrage à partir de données historiques du facteur de risque (ici le taux court) ;

- calibrage de λ à partir de prix (ici de ZC).

De la sorte il devient possible de calculer des quantiles et des prix de manière cohérente.

Difficulté : instabilité du calibrage en fonction de l'historique retenu…

2. Quelques observations

2.4. Structure de dépendance

Peu importante pour le calcul du BEL, la structure de dépendance devient déterminante pour le calcul du besoin en capital. La copule gaussienne utilisée la plupart du temps n'est pas adaptée (ici on modélise l'inflation, les taux court et long, les rendements des actions et de l'immobilier) :

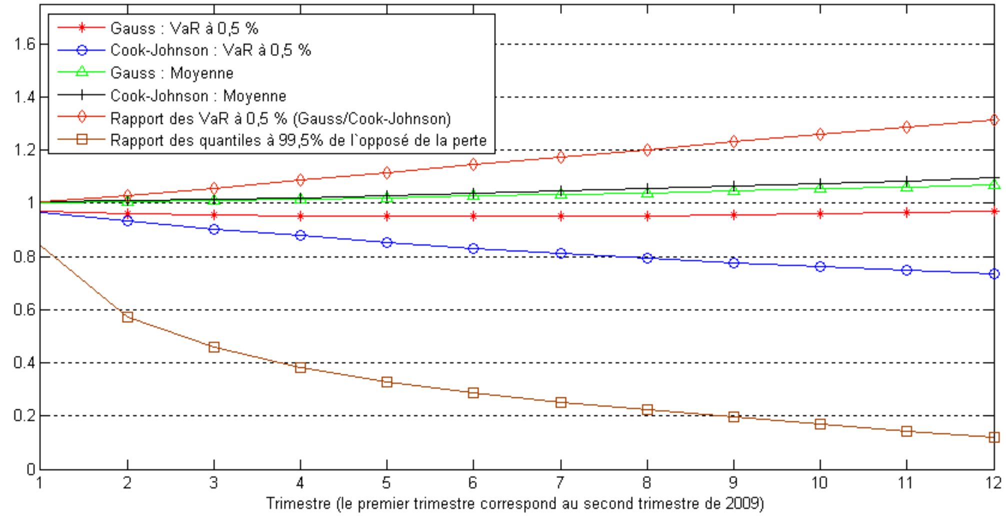
Copule	La norme	La norme
Gaussienne	1,408	*13,476*
Student	1,916	58,224
Cook Johnson	*0,974*	13,786
Gumbel	0,989	13,865
Franck	0,988	13,857

On est conduit à retenir une copule archimédienne (*cf*. Armel et al. [2010]).

2.4. Structure de dépendance

Les conséquences du point de vue de l'exigence de marge sont sensibles. On considère un portefeuille composé de 80 % d'obligations d'Etat EEA 5 ans, 10 % d'actions françaises et 10 % d'immobilier, géré de manière à maintenir cette allocation constante.

$$R'(t) = \frac{1 - VaR_{[0,t]}^{Gauss}}{1 - VaR_{[0,t]}^{Cook-Johnson}}$$



Le SCR est égal à 4,7 % avec la structure normale, 12,2 % avec Clayton.

Conclusion – travaux en cours

La description des dynamiques dans un univers risque-neutre, si elle fournit un cadre simple pour calculer des provisions (des prix) peut, lorsqu'elle est utilisée sans précaution :

- conduire à une vision simpliste du prix de marché du risque, pénalisante dans une perspective de long terme ;

- donner lieu à des incohérences entre la vision « monde réel » et la vision « risque neutre » de la dynamique des facteurs.

La modélisation explicite des prix de marché du risque, qui n'empêche pas de recourir à la (ou une) probabilité risque neutre pour la commodité des calculs, permet de construire un GSE plus cohérent.

Conclusion – travaux en cours

A la lumière des éléments présentés ci-avant, l'idée est de :

- définir une structure de GSE de complexité minimale permettant de répondre dans de bonnes conditions aux exigences de Solvabilité 2 ;

- introduire dans ce GSE une modélisation explicite du prix de marché du risque en suivant la démarche proposée par Ahmad et Wilmott [2006] (paramétrique) ou Stanton [1997] (non paramétrique) ;

- construire une structure de dépendance non linéaire à l'aide de copules (Cook-Johnson) en s'inspirant de Armel et al. [2010].

NB : quelle part de risque systématique est intégrée à la probabilité de 0,5 %, en d'autres termes que signifie ce seuil (*cf*. Leroy et Planchet [2010]) ?

Références bibliographiques

ACP [2010] *Orientations nationales complémentaires*

AHMAD R.; WILMOTT P. [2006] « The Market Price of Interest-rate Risk: Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets », *Wilmott magazine*.

ARMEL K., PLANCHET F., KAMEGA A. [2010] « Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ? », *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, WP2134.

CAJA A., PLANCHET F. [2010] « La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? », *Assurances et gestion des risques*, A paraître.

CEIOPS [2010] *Technical specifications for QIS 5*

GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 10, n°20.

LEROY G., PLANCHET F. [2010] « Que signifie la ruine dans Solvabilité 2 ? », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°147 du 01/05/2010.

PLANCHET F., THÉROND P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance*, seconde édition, Paris : Economica.

STANTON R. [1997] « A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk », *Journal of Finance* 52: 1973-2002.

http://www.ressources-actuarielles.net